К. У. ШАХНО

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

Учпедгиз

К. У. ШАХНО

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ
9—11 КЛ.

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ДОПОЛНЕННОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва 1961

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава первая **Обозначения и некоторые постоянные**

§ 1. Латинский алфавит 3
§ 2. Греческий алфавит . . . . . —
§ 3. Математические обозначения 4
§ 4. Некоторые постоянные 5

Глава вторая **Арифметика**

§ 1. Десятичная система счисления 7
§ 2. Арифметические действия 8
§ 3. Признаки делимости 12
§ 4. Разложение чисел на простые множители 13
§ 5. Наибольший общий делитель (н. о. д.) и наименьшее общее кратное (н. о. к.) 14
§ 6. Обыкновенные (простые) дроби 16
§ 7. Десятичные дроби 20
§ 8. Периодические дроби 22
§ 9. Проценты 23
§ 10. Пропорции и пропорциональная зависимость 24

Глава третья **Алгебра**

§ 1. Рациональные числа 27
§ 2. Действия с одночленами 29
§ 3. Действия с многочленами 31
§ 4. Формулы сокращенного умножения и деления 35
§ 5. Разложение многочлена на множители 36
§ 6. Алгебраические дроби 38

§ 7. Вещественные, или действительные, числа 40
§ 8. Действия с корнями (радикалами) 43
§ 9. Извлечение квадратного корня из числа 48
§ 10. Действия со степенями 50
§ 11. Комплексные числа 51
§ 12. Общие сведения об уравнениях 60
§ 13. Линейные уравнения и системы линейных уравнений . . 65
§ 14. Уравнения и системы уравнений 2-й степени 69
§ 15. Уравнения высших степеней с одним неизвестным 73
§ 16. Дробные и иррациональные уравнения 76
§ 17. Общие сведения о неравенствах 77
§ 18. Неравенства и системы неравенств с одним неизвестным. 79
§ 19. Некоторые полезные неравенства 81
§ 20. Последовательности чисел (числовые последовательности). 82
§ 21 Прогрессии 85
§ 22. Соединения 88
§ 23. Бином Ньютона 90
§ 24. Логарифмы 91
§ 25. Таблицы десятичных логарифмов 95
§ 26. Показательные и логарифмические уравнения 97
§ 27. Функции и их графики 99
§ 28 Определители второго порядка 107

Глава четвёртая **Геометрия**

§ 1. Введение 112

Планиметрия

§ 2. Действия с отрезками 113
§ 3. Окружность как геометрическое место точек. Действия с дугами 116
§ 4. Углы и параллельные прямые 117
§ 5. Треугольники и многоугольники 121
§ 6. Окружность 130
§ 7. Гомотетичные фигуры 135
§ 8. Длина окружности и площадь круга 139
§ 9. Простейшие задачи на построение, решаемые с помощью циркуля и линейки, ... 140
§ 10. Некоторые методы решения задач на построение 150

Стереометрия

§ 11. Взаимное расположение прямых и плоскостей 157
§ 12. Основные задачи на построение, пп. 91 — 97 161
§ 13. Многогранники 163
§ 14. Цилиндр и конус 168
§ 15. Шар 172

Глава пятая **Тригонометрия**

§ 1. Углы и их измерение 176
§ 2. Определение тригонометрических функций 178
§ 3. Характер изменения тригонометрических функций с изменением угла 182
§ 4. Вычисление значений тригонометрических функций по значению одной из них 185
§ 5. Формулы (теоремы) сложения и их следствия 186
§ 6. Обратные тригонометрические функции 189
§ 7. Таблицы натуральных тригонометрических величин 195
§ 8. Таблицы логарифмов тригонометрических величин 199
§ 9. Тригонометрические уравнения 199
§ 10. Решение треугольников 205
§ 11. Разные формулы 209

Глава шестая **Производная и ее приложения к исследованию функций и построению их графиков.**

§ 1. Предел функции 210
§ 2. Непрерывные функции 215
§ 3. Производная 222
§ 4. Исследование функций 228
§ 5. Построение графиков функций 235
§ 6. Приближенное решение уравнений 241
Алфавитный указатель 246

Глава первая

ОБОЗНАЧЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ПОСТОЯННЫЕ

§ 1. Латинский алфавит

A	a	а	N	n	эн
B	b	бэ	O	o	о
C	c	цэ	P	p	пэ
D	d	дэ	Q	q	ку
E	e	э	R	r	эр
F	f	эф	S	s	эс
G	g	гэ (же)	T	t	тэ
H	h	ха (аш)	U	u	у
I	i	и	V	v	вэ
J	j	йот (жи)	W	w	дубль-ве
K	к	ка	X	x	икс
L	l	эль	Y	y	игрек
M	m	эм	Z	z	зэт

§ 2. Греческий алфавит

A	α	альфа	N	ν	ни (ню)
B	β	бета	Ξ	ξ	кси
Γ	γ	гамма	O	o	омикрон
Δ	δ	дельта	Π	π	пи
E	ε	эпсилон	P	ρ	ро
Z	ζ	дзета	Σ	σ	сигма
H	η	эта	T	τ	тау
Θ	θ ϑ	тэта	Y	υ	ипсилон
I	ι	йота	Φ	φ	фи
K	κ	каппа	X	χ	хи
Λ	λ	ламбда	Ψ	ψ	пси
M	μ	ми (мю)	Ω	ω	омега

§ 3. Математические обозначения

Изображение	Значение	Пример
$=$	равно	$x = y$
$\equiv$	тождественно равно	$x \equiv y$
$\neq$	не равно	$x \neq y$
$\approx$	приближенно равно	$x \approx y$
$>$	больше	$x > y$
$<$	меньше	$x < y$
$\geqslant$	больше или равно	$x \geqslant y$
$\leqslant$	меньше или равно	$x \leqslant y$
$\| \|$	абсолютная величина или модуль	$\| x \|$
$+$	сложение	$x + y$
$-$	вычитание	$x - y$
$\cdot$ или $\times$	умножение	$x \cdot y,\ x \times y$
: или $-$	деление	$x : y,\ \frac{x}{y}$
$\sqrt[n]{\ }$	корень n-й степени	$\sqrt[4]{16} = 2$
$\log_a$	логарифм по основанию a	$\log_3 9 = 2$
lg	логарифм десятичный	$\lg 10 = 1$
ln	логарифм натуральный	$\ln e = 1$
$\angle$	угол	$\angle A = 30°$
$\triangle$	треугольник	$\triangle ABC$
$\smile$	дуга	$\smile AB$
$\parallel$	параллельно	$MN \parallel PQ$
$\perp$	перпендикулярно	$MN \perp PQ$
$\sim$	подобно	$\triangle ABC \sim \triangle PQR$
$^\circ$	градус	$15°$
$'$	минута	$17'$
$''$	секунда	$18''$
sin	синус	$\sin \alpha$
cos	косинус	$\cos \alpha$
tg	тангенс	$\operatorname{tg} \alpha$
ctg	котангенс	$\operatorname{ctg} \alpha$
sec	секанс	$\sec \alpha$
cosec	косеканс	$\operatorname{cosec} \alpha$
arcsin	арксинус	$\arcsin 1$
arccos	арккосинус	$\arccos \frac{1}{2}$

Продолжение

Изображение	Значение	Пример
arctg	арктангенс	arctg 2
arcctg	арккотангенс	arcctg 3
arcsec	арксеканс	arcsec 4
arccosec	арккосеканс	arccosec 4

§ 4. Некоторые постоянные
(с точностью до 0,0001)

n	$\lg n$	n	$\lg n$
$\sqrt{2} = 1{,}4142$	0,1505	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) = 0{,}8090$	$\bar{1}$,9080
$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}7071$	$\bar{1}$,8495	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 0{,}5878$	$\bar{1}$,7692
$\sqrt{3} = 1{,}7321$	0,2386	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 0{,}9511$	$\bar{1}$,9782
$\sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}5774$	$\bar{1}$,7614	$\sqrt[3]{2} = 1{,}2599$	0,1003
$\sqrt{5} = 2{,}2361$	0,3495	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0{,}7937$	$\bar{1}$,8997
$\sqrt{\frac{1}{5}} = 0{,}4472$	$\bar{1}$,6505	$\sqrt[3]{3} = 1{,}4423$	0,1590
$\sqrt{6} = 2{,}4495$	0,3891	$\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = 0{,}6934$	$\bar{1}$,8410
$\sqrt{\frac{1}{6}} = 0{,}4083$	$\bar{1}$,6109	$\sqrt[3]{6} = 1{,}8171$	0,2594
$\sqrt{10} = 3{,}1623$	0,5000	$\sqrt[3]{\frac{1}{6}} = 0{,}5503$	$\bar{1}$,7406
$\sqrt{15} = 3{,}8730$	0,5881	$\pi = 3{,}1416$	0,4972
$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} = 0{,}3827$	$\bar{1}$,5828	$2\pi = 6{,}2832$	0,7982
$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} = 0{,}9239$	$\bar{1}$,9656	$\frac{\pi}{2} = 1{,}5708$	0,1961
$\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right) = 0{,}3090$	$\bar{1}$,4900	$\frac{\pi}{3} = 1{,}0472$	0,0200

Продолжение

n	$\lg n$	n	$\lg n$
$\frac{\pi}{4} = 0{,}7854$	$\bar{1}{,}8951$	$\frac{\pi}{180} = 0{,}0175$	$\bar{2}{,}2419$
$\frac{\pi}{6} = 0{,}5236$	$\bar{1}{,}7190$	$\sqrt[3]{\pi} = 1{,}4646$	$0{,}1657$
$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183$	$\bar{1}{,}5029$	$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} = 0{,}6828$	$\bar{1}{,}8343$
$\frac{180}{\pi} = 57{,}2958$	$1{,}7581$	$e = 2{,}7183$	$0{,}4343$
$\pi^2 = 9{,}8696$	$0{,}9943$	$e^2 = 7{,}3891$	$0{,}8686$
$\frac{1}{\pi^2} = 0{,}1013$	$\bar{1}{,}0057$	$\sqrt{e} = 1{,}6488$	$0{,}2172$
$\sqrt{\pi} = 1{,}7725$	$0{,}2486$	$M = \lg e = 0{,}4343$	$\bar{1}{,}6378$
$\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0{,}5642$	$\bar{1}{,}7514$	$\frac{1}{M} \ln 10 = 2{,}3026$	$0{,}3622$

Глава вторая

АРИФМЕТИКА

§ 1. Десятичная система счисления

1. Целые и дробные числа. В арифметике рассматриваются *целые* (*натуральные*) числа, *дробные* числа и *нуль*. Целое число есть единица или собрание нескольких единиц. Дробное число (*дробь*) есть одна доля или собрание нескольких одинаковых долей единицы.

Ряд чисел 1, 2, 3, 4,... называется *натуральным*. Натуральный ряд бесконечен.

2. Система счисления. *Нумерацией*, или *системой счисления*, называется общий способ обозначения и наименования целых чисел.

3. Десятичная система. В практической жизни принята *десятичная система* счисления. Для записи любого числа в этой системе существует десять знаков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, которые называются *цифрами*. В записи числа по десятичной системе первая, вторая, третья и т. д. цифры этого числа, считая справа налево, называются единицами *первого*, *второго*, *третьего* и т. д. *разрядов*. Например, в числе 1524 имеется 4 единицы первого разряда, 2 единицы второго, 5 единиц третьего и 1 единица четвертого разряда. Десять единиц какого-нибудь разряда составляют одну единицу следующего высшего разряда. Число 10 поэтому называется *основанием* десятичной системы счисления.

4. Другие системы счисления. За основание системы счисления можно взять не 10, а другое число, например 6. Тогда получится шестеричная система. Для изображения любого числа в этой системе понадобилось бы только шесть цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Шесть единиц какого-нибудь разряда составляют единицу следующего высшего разряда.

5. Римские цифры. Цифры, употребляемые в десятичной системе, называются *арабскими*. Для обозначения знаменательных дат, наименований съездов и конференций, для нумерации глав в книгах и в других случаях приняты *римские* цифры. Их семь: I = 1, V = 5, X = = 10, L = 50, C = 100, *D* = 500, M = 1000. Числа первого десятка записываются так:

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Другие числа записываются путем повторения цифр, причем если бо́льшая цифра предшествует меньшей, то они складываются, если же бо́льшая следует за меньшей, то они вычитаются. Больше трех раз подряд одна и та же цифра не ставится.

Примеры. XXV = 25, CCCV = 305, XLII = = 42, MCCXVI = 1216.

§ 2. Арифметические действия

6. Арифметическое действие. Нахождение по нескольким данным числам одного нового числа называется *арифметическим действием*. Арифметика занимается исследованием простейших свойств чисел и изучением действий над ними.

7. Число действий. В арифметике рассматривается шесть действий: *сложение*, *вычитание*, *умножение*, *деление*, *возведение в степень*, *извлечение корня*.

8. Сложение. Это действие состоит в том, что по нескольким числам, называемым *слагаемыми*, находится число, называемое их *суммой*.

Пример. 5 + 3 = 8; 5 и 3 — слагаемые, 8 — сумма.

9. Вычитание есть действие, обратное сложению, посредством которого по данной сумме (*уменьшаемое*) и данному слагаемому (*вычитаемое*) отыскивается другое слагаемое (*разность*).

Пример. 5 — 2 = 3; 5 — уменьшаемое, 2 — вычитаемое, 3 — разность.

10. Умножение. Умножить некоторое число (*множимое*) на целое число (*множитель*) — значит повторить множимое слагаемым столько раз, сколько единиц содержится в множителе. Результат умножения называется *произведением*.

Если множителем является 1, то полагают $a \cdot 1 = a$.

Пример. $2 \cdot 3 = 6$; 2 — множимое, 3 — множитель, 6 — произведение.

Множимое и множитель называются также *сомножителями*.

11. Деление есть действие, обратное умножению, посредством которого по данному произведению (*делимое*) и данному сомножителю (*делитель*) отыскивается другой сомножитель (*частное*).

Пример. $6 : 2 = 3$; 6 — делимое, 2 — делитель, 3 — частное.

12. Деление с остатком. Если при делении целого числа на целое число в частном получается целое число, то такое деление целых чисел называется *точным*. Это не всегда возможно. Но тогда возможно *деление с остатком*. В этом случае найдется такое наибольшее целое число, которое при умножении на делитель даст произведение, не превосходящее делимого. Оно называется *неполным частным*. Разность между делимым и произведением делителя на неполное частное называется *остатком от деления*. Делимое равно делителю, умноженному на неполное частное, плюс остаток. Остаток всегда меньше делителя.

Пример. Неполное частное от деления числа 27 на 4 равно 6, а остаток равен 3. Очевидно, $27 = 4 \cdot 6 + 3$ и $3 < 4$.

13. Возведение в степень. Возвести некоторое число во вторую, в третью и т. д. (вообще в целую) степень — значит взять это число сомножителем два, три раза и т. д. Число, которое берется сомножителем, называется *основанием степени*; число, показывающее, сколько раз повторяется основание, называется *показателем степени*; результат возведения числа в степень называется *степенью* этого числа.

Пример. $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$; 2 — основание степени, 3 — показатель степени, 8 — степень.

14. Извлечение корня есть действие, обратное возведению в степень, посредством которого по данной степени (*подкоренное число*) и данному показателю степени (*показатель корня*) отыскивается основание (*корень*).

Пример. $\sqrt[3]{64} = 4$; 64 — подкоренное число, 3 — показатель корня, 4 — корень.

15. Основные законы. 1. Сумма не изменится от перестановки слагаемых (*переместительный*, или *коммутативный, закон сложения*).

Пример. $2 + 3 + 4 = 3 + 4 + 2$.

2. Сумма нескольких слагаемых не изменится, если какую-нибудь группу рядом стоящих слагаемых заменить их суммой (*сочетательный*, или *ассоциативный*, *закон сложения*).

Пример. $2 + 3 + 4 = (2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$.

3. Произведение не изменится от перестановки сомножителей (*переместительный*, или *коммутативный*, *закон умножения*).

Пример. $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$.

4. Произведение нескольких сомножителей не изменится, если какую-нибудь группу рядом стоящих сомножителей заменить их произведением (*сочетательный*, или *ассоциативный*, *закон умножения*).

Пример. $2 \cdot 3 \cdot 4 = (2 \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$.

5. Чтобы умножить число на сумму чисел, достаточно умножить это число на каждое слагаемое и полученные произведения сложить (*распределительный*, или *дистрибутивный*, *закон умножения относительно суммы*).

Пример. $2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14$.

16. Действия с нулем. 1. Сложение какого-нибудь числа с нулем дает то же число.

2. Вычитание нуля из какого-нибудь числа дает то же число.

Примеры. а) $5 + 0 = 5$; б) $4 - 0 = 4$.

3. Умножение числа на нуль дает произведение, равное нулю.

Примеры. а) $2 \cdot 0 = 0$, б) $0 \cdot 3 = 0$.

4. Частное от деления нуля на число, отличное от нуля, равно нулю. Например, $0 : 5 = 0$.

5. *На нуль делить нельзя.* Если делимое не равно нулю, а равно, например, 10, то при делении на нуль, если бы оно было возможно, получилось бы в частном число, которое после умножения на нуль дает нуль, а не десять. Если и делимое и делитель равны нулю, то тогда любое число удовлетворит определению частного и задача деления становится неопределенной.

17. Некоторые свойства сложения и вычитания.

1. Чтобы прибавить сумму нескольких чисел, достаточно прибавить первое слагаемое, к полученному результату прибавить второе слагаемое и т. д.

2. Чтобы прибавить разность, достаточно прибавить уменьшаемое и от результата отнять вычитаемое.

3. Чтобы вычесть сумму нескольких чисел, достаточно вычесть первое слагаемое, от полученного результата вычесть второе слагаемое и т. д.

4. Чтобы вычесть разность, достаточно вычесть уменьшаемое и к полученному результату прибавить вычитаемое.

18. Некоторые свойства умножения и деления.

1. Чтобы умножить произведение на число, достаточно умножить на это число один из сомножителей, оставив остальные без изменения.

2. Чтобы умножить число на произведение, достаточно умножить это число на первый сомножитель, полученный результат умножить на второй сомножитель и т. д.

3. Чтобы разделить разность на число, достаточно разделить на это число уменьшаемое, затем вычитаемое и из первого результата вычесть второй.

4. Чтобы разделить сумму на число, достаточно разделить на это число каждое слагаемое и результаты сложить.

5. Чтобы разделить произведение на число, достаточно разделить на это число один из сомножителей, оставив остальные без изменения.

6. Чтобы разделить число на произведение, достаточно разделить это число на первый сомножитель, полученный результат разделить на второй сомножитель и т. д.

19. Изменение результатов действий.

1. Если одно слагаемое увеличить (уменьшить) на некоторое число, не изменяя остальных слагаемых, то и сумма увеличится (уменьшится) на это число.

2. Если уменьшаемое увеличить (уменьшить) на некоторое число, не изменяя вычитаемого, то и разность увеличится (уменьшится) на это число.

3. Если вычитаемое увеличить (уменьшить) на некоторое число, не изменяя уменьшаемого, то разность уменьшится (увеличится) на это число.

4. Если уменьшаемое и вычитаемое увеличить или уменьшить на одно и то же число, то разность не изменится.

5. Если один из сомножителей увеличить (уменьшить) в некоторое число раз, не изменяя остальных сомножителей, то и произведение увеличится (уменьшится) в то же число раз.

6. Если делимое увеличить (уменьшить) в некоторое число раз, не изменяя делителя, то и частное увеличится (уменьшится) в то же число раз.

7. Если делитель увеличить (уменьшить) в некоторое число раз, не изменяя делимого, то частное уменьшится (увеличится) в то же число раз.

8. Если делимое и делитель увеличить или уменьшить в одинаковое число раз, то частное не изменится.

20. Порядок действий. Сложение и вычитание называются *действиями первой ступени*. Умножение и деление — *действиями второй ступени*. Возведение в степень и извлечение корня — *действиями третьей ступени*. Действия одной и той же ступени производятся в том порядке, в каком они записаны. Если в выражении содержатся действия различных ступеней, то сначала выполняются действия высших, а затем низших ступеней. Если нужно произвести действия в другом порядке, то употребляют *скобки*.

Действия над числами, заключенными в скобки, производятся первыми. В том случае когда в скобки заключено выражение, уже содержащее скобки, то в первую очередь производят действия над числами, заключенными во «внутренних» скобках.

Примеры. а) $4:2\cdot3=2\cdot3=6$; б) $4+8:2^2-3=4+8:4-3=4+2-3=6-3=3$; в) $2\cdot(6+4\times\times2)=2\cdot(6+8)=2\cdot14=28$; г) $[12+(3^2\cdot4-24):2]:(16:2-2)=[12+(9\cdot4-24):2]:(8-2)=(12+6):6=18:6=3$.

Изложенные здесь действия и их законы справедливы как для целых, так и для дробных чисел. Случай умножения на дробное число рассмотрен ниже (п. 40).

§ 3. Признаки делимости

21. Признак делимости на 2. На 2 делятся все те и только те числа, которые оканчиваются четной цифрой, т. е. цифрой 0, 2, 4, 6, 8.

Пример. Число 2136 делится на 2, так как 6 — четная цифра.

22. Признак делимости на 3. На 3 делятся все те и только те числа, у которых сумма цифр делится на 3.

Пример. Число 23 412 делится на 3, так как сумма $2+3+4+1+2=12$ делится на 3.

23. Признак делимости на 4. На 4 делятся все те и только те числа, у которых две последние цифры образуют число, делящееся на 4.

Пример. Числа 1228 и 1500 делятся на 4.

24. Признак делимости на 5. На 5 делятся все те и только те числа, которые оканчиваются цифрой, делящейся на 5 (т. е. цифрами 5 или 0).

Пример. Числа 1935 и 2000 делятся на 5.

25. Признак делимости на 6. На 6 делятся все те и только те числа, которые делятся на 2 и на 3.

Пример. Число 12 246 делится на 6, так как оно оканчивается четной цифрой (6) и сумма его цифр ($1 + 2 + 2 + 4 + 6 = 15$) делится на 3.

26. Признак делимости на 8. На 8 делятся все те и только те числа, у которых три последние цифры образуют число, делящееся на 8.

Пример. Числа 12 424, 23 800, 35 000 делятся на 8.

27. Признак делимости на 9. На 9 делятся все те и только те числа, у которых сумма цифр делится на 9.

Пример. Число 342 954 делится на 9, так как сумма $3 + 4 + 2 + 9 + 5 + 4 = 27$ делится на 9.

28. Признак делимости на 10. На 10 делятся все те и только те числа, которые оканчиваются нулем.

Пример. Число 121 250 делится на 10.

Таковы признаки делимости на числа первого десятка, за исключением 7. Существуют признаки делимости на 7, но все они практически неудобны. Вот один из них: число делится на 7, если разность между числом его десятков и удвоенным числом его единиц (первого разряда) делится на 7.

Пример. Число 2142 делится на 7, так как $214 - 2 \cdot 2 = 214 - 4 = 210$ делится на 7. Если бы эта разность оказалась большой, то к ней можно было бы применить тот же признак для установления делимости ее на 7.

§ 4. Разложение чисел на простые множители

29. Простые и составные числа. Всякое целое число (кроме единицы), которое делится только на единицу и само на себя, называется *простым* или *первоначальным*. Например, числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 простые. Существует бесконечное множество простых чисел. Единицу не относят к простым числам.

Число, которое делится не только на единицу и само на себя, но и на другие числа, называется *составным* или *сложным*. Например, 12 — составное число, так как делится не только на 1 и на 12, но еще и на 2, 3, 4, 6.

30. Разложение составного числа на простые множители. Число, на которое делится составное число, называется *делителем* или *множителем* этого составного числа. Последнее же по отношению к своему делителю называется *кратным* его. Например, число 12 есть кратное числа 2, а число 2 есть делитель числа 12.

Если множитель составного числа есть число простое, то его называют *простым множителем*. Всякое составное число может быть разложено на простые множители, т. е. может быть представлено в виде произведения одних простых множителей и притом единственным способом.

Пример. $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Для разложения числа на простые множители применяют следующее правило.

Пусть требуется разложить на простые множители число 360. Пользуясь признаками делимости, выясняем, делится ли оно на наименьшее простое число, т. е. на 2. Оказывается, что делится. Тогда пишем число 360, проводим справа от него вертикальную черту и справа от черты пишем найденный делитель 2, а под числом 360 — частное от деления 360 на 2, т. е. 180.

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Далее с числом 180 поступаем так же и устанавливаем, что 180 тоже имеет 2 своим делителем. Пишем число 2 справа от 180, а под числом 180 записываем число 90, являющееся частным от деления 180 на 2. Затем с числом 90 производим такие же операции, и справа от него получаем снова число 2, а под ним — число 45. Последнее на два не делится, и поэтому испытываем следующее по величине простое число 3.

И так продолжаем этот процесс испытаний, пока не получим в частном 1. Числа, записанные справа от вертикальной черты, и составят *все* простые множители числа 360.

§ 5. Наибольший общий делитель (н. о. д.) и наименьшее общее кратное (н. о. к.)

31. Н. о. д. *Общим делителем* нескольких целых чисел называется число, являющееся делителем каждого из этих чисел. Например, числа 2, 3 и 6 являются общими делителями чисел 30, 42 и 66. Самый большой из общих делителей данных чисел называется их *наибольшим общим делителем*.

В приведенном выше примере н. о. д. чисел 30, 42 и 66 будет 6.

32. Способы нахождения н. о. д. 1. Чтобы найти н. о. д. нескольких чисел, разлагают каждое из этих чисел на простые множители и выписывают из этих разложений все общие множители, причем каждый из них берут с наименьшим показателем, встречающимся в этих разложениях. Н. о. д. будет произведение всех выписанных множителей. Если н. о. д. равен единице, то числа общих делителей не имеют и называются *взаимно простыми*.

Пример. Так как $1092 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$, $660 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ и $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, то н. о. д. чисел 1092, 660 и 504 есть $2^2 \cdot 3 = 12$.

2. Чтобы найти н. о. д. двух чисел, делят большее число на меньшее, и если получается остаток, то делят меньшее число на остаток; если снова получается остаток, то делят первый остаток на второй; так продолжают поступать до тех пор, пока в остатке не получится нуль. Тогда последний делитель и будет н. о. д. данных чисел.

Пример. Разделив число 660 на 504, получим в остатке 156. Разделив 504 на 156, получим в остатке 36. Разделив 156 на 36, получнм в остатке 12. Разделив 36 на 12, получим в остатке 0. Следовательно, 12 есть н. о. д. чисел 660 и 504.

Можно так же найти н. о. д. трех или более чисел способом последовательного деления. Для этого сперва находят н. о. д. каких-нибудь двух чисел из числа данных. Затем находят н. о. д. найденного делителя и какого-нибудь третьего из данных чисел и так продолжают до тех пор, пока не будут исчерпаны все данные числа. Н. о. д. последней пары чисел и будет н. о. д. данных чисел.

33. Н. о. к. *Общим кратным* нескольких целых чисел называется число, являющееся кратным каждого из этих чисел. Например, числа 12, 24 и 36 являются общими кратными чисел 3 и 4. Самое малое из общих кратных данных чисел называется их *наименьшим общим кратным*. В приведенном выше примере н. о. к. чисел 3 и 4 будет 12.

34. Способы нахождения н. о. к. 1. Чтобы найти н. о. к. нескольких чисел, разлагают каждое из этих чисел на простые множители и выписывают из этих разложений все общие множители, причем каждый из них берут с наибольшим показателем, встречающимся в этих разложениях. Н. о. к. будет произведением всех выписанных множителей. Если числа не имеют общих множителей, то н. о. к. их равно произведению всех этих чисел.

Пример. Так как $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ и $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$, то н. о. к. чисел 360, 70 и 140 есть $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$.

2. Н. о. к. двух чисел можно найти, разделив произведение этих чисел на их н. о. д.

Пример. Так как н. о. д. чисел 360 и 70 есть 10, то их н. о. к. равно:

$$\frac{360 \cdot 70}{10} = 2520.$$

Если требуется найти н. о. к. трех или более чисел, то можно сперва найти н. о. к. двух каких-нибудь чисел из числа данных, затем н. о. к. найденного кратного и какого-нибудь третьего из данных чисел и т. д., пока не будут исчерпаны все данные числа. Н. о. к. последней пары чисел и будет н. о. к. данных чисел.

§ 6. Обыкновенные (простые) дроби

35. Дробь. Доля (часть) единицы или собрание нескольких одинаковых долей единицы называется *обыкновенной дробью* (или *простой дробью*, *дробью*, *дробным числом*).

Дробь изображается с помощью двух чисел и черты.

Под чертой пишется число, показывающее, на сколько долей разделена единица. Оно называется *знаменателем* дроби. Над чертой пишется число, показывающее, сколько таких долей содержится в дроби. Оно называется *числителем* дроби. Числитель и знаменатель называются *членами* дроби.

Если у дроби числитель меньше знаменателя, то она называется *правильной* дробью. В противном случае — *неправильной*.

Пример. $\frac{2}{3}$ — правильная дробь, а $\frac{2}{2}$ и $\frac{3}{2}$ — неправильные.

Правильная дробь меньше единицы, а неправильная больше единицы или равна единице.

Из неправильной дроби всегда можно выделить целую часть путем деления числителя на знаменатель.

Примеры. а) $\frac{4}{4} = 1$; б) $\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5} = 1\frac{1}{5}$.

В последнем примере получилось число, содержащее целую и дробную части. Такое число называется *смешанным*.

Смешанное число можно всегда обратить в неправильную дробь. Так,

$$8\frac{2}{3} = \frac{8 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{26}{3}.$$

36. Основное свойство дроби. 1. Величина дроби не изменится, если члены дроби увеличить или уменьшить в одно и то же число раз.

Примеры. а) $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6}$; б) $\frac{6}{8} = \frac{6 : 2}{8 : 2} = \frac{3}{4}$.

2. Пользуясь основным свойством, можно иногда дробь заменить равной ей дробью с меньшими членами. Эта замена называется *сокращением дроби*. Она возможна тогда, когда числитель и знаменатель имеют общие множители.

Пример. $\frac{16}{224} = \frac{16 : 16}{224 : 16} = \frac{1}{14}$.

Если члены дроби не имеют общих делителей, то дробь называется *несократимой*. Чтобы дробь стала несократимой, нужно ее сократить на н. о. д.

3. Пользуясь основным свойством дроби, можно дроби с разными знаменателями *привести к общему знаменателю*. Для этого поступают так: сокращают дроби, если это возможно; находят н. о. к. всех знаменателей; вычисляют для каждой дроби частное от деления найденного н. о. к. на ее знаменатель (то есть находят *дополнительные множители*); умножают оба члена каждой дроби на соответствующий ей дополнительный множитель.

Пример. Привести к общему знаменателю дроби $\frac{5}{84}$ и $\frac{7}{30}$.

Решение. Н. о. к. знаменателей равно 420. Дополнительные множители: $420 : 84 = 5$; $420 : 30 = 14$. Отсюда

$$\frac{5}{84} = \frac{5 \cdot 5}{84 \cdot 5} = \frac{25}{420}, \quad \frac{7}{30} = \frac{7 \cdot 14}{30 \cdot 14} = \frac{98}{420}.$$

37. Сравнение дробей. 1. Из двух дробей с одинаковыми знаменателями та больше, у которой числитель больше. Например, $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$, так как $5 > 3$.

2. Из двух дробей с одинаковыми числителями та больше, у которой знаменатель меньше.

Пример. $\frac{6}{7} > \frac{6}{11}$, так как $7 < 11$.

3. Чтобы сравнить дроби, числители и знаменатели которых различны, достаточно эти дроби привести к общему знаменателю и сравнить числители.

Пример. $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$, так как $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$, $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ и $9 > 8$.

4. С увеличением числителя и знаменателя на одно и то же число дробь увеличивается, если она правильная, и уменьшается, если она неправильная и не равна единице.

Примеры. а) $\frac{3}{5} < \frac{3+1}{5+1} = \frac{4}{6}$, б) $\frac{7}{5} > \frac{7+1}{5+1} = \frac{8}{6}$.

38. Сложение. Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители и под суммой, которая будет числителем результата, подписать тот же знаменатель. Если знаменатели дробей различны, то для сложения дробей их нужно предварительно привести к общему знаменателю. При сложении смешанных чисел складывают отдельно целые части и дробные части.

Пример. $1\frac{2}{5} + 3\frac{3}{7} = 4\frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35} = 4\frac{29}{35}$.

39. Вычитание. Чтобы вычесть из дроби дробь, когда знаменатели дробей одинаковы, нужно из числителя уменьшаемого вычесть числитель вычитаемого и под разностью, которая будет числителем результата, подписать тот же знаменатель. Если знаменатели различны, то для вычитания дробей их нужно предварительно привести к общему знаменателю. При вычитании смешанных чисел производят отдельно вычитание целых частей и дробных частей. Если дробная часть уменьшаемого окажется меньше дробной части вычитаемого, то единица уменьшаемого обращается в неправильную дробь (*занимают* единицу).

Пример. $4\frac{2}{5} - 1\frac{3}{5} = 3\frac{7}{5} - 1\frac{3}{5} = 2\frac{7-3}{5} = 2\frac{4}{5}$.

40. Умножение. Чтобы умножить дробь на дробь, нужно умножить числитель на числитель, а знаменатель на знаменатель и первое произведение сделать числителем

результата, а второе — знаменателем. Если умножаются смешанные числа, то их предварительно обращают в неправильные дроби. При умножении целого числа на дробь представляют целое число как дробь со знаменателем единица.

Примеры. а) $1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{3}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{11}{4} = \frac{33}{8} = 4\frac{1}{8}$;

б) $2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

Приведенное здесь правило может быть принято за определение умножения дроби на дробь и целого числа на дробь, которые не были охвачены определением п. 10.

41. Деление. 1. Чтобы разделить дробь на дробь, нужно числитель первой дроби умножить на знаменатель второй, а знаменатель первой на числитель второй и первое произведение сделать числителем результата, а второе — знаменателем.

Если делятся смешанные числа, то их предварительно обращают в неправильные дроби. Когда делимое или делитель есть целое число, то его представляют в виде дроби со знаменателем единица.

Примеры. а) $1\frac{2}{3} : 1\frac{1}{3} = \frac{5}{3} : \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$;

б) $2 : \frac{2}{5} = \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{2} = 5$.

2. Если знаменатель и числитель данной дроби сделать соответственно числителем и знаменателем новой дроби, то эта новая дробь по отношению к первоначальной называется *обратной*, поэтому деление числа на дробь равносильно умножению числа на дробь, обратную данной.

42. Нахождение дроби (части) числа. Чтобы найти величину дроби (части) данного числа, нужно данное число умножить на эту дробь.

Пример. Для отопления квартиры зимой было заготовлено 8 кубометров дров, а израсходовано лишь $\frac{3}{4}$ запаса. Сколько кубометров дров было израсходовано?

Решение. $8 \cdot \frac{3}{4} = 6$.

43. Нахождение числа по его дроби (части). Чтобы найти число по данной величине его дроби (части), нужно данную величину разделить на эту дробь.

Пример. До полудня было скошено 2 гектара, что составило $\frac{2}{3}$ площади всего луга. Какова площадь луга в гектарах?

Решение. $2 : \frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$.

§ 7. Десятичные дроби

44. Десятичная дробь и ее изображение. Дробь, у которой знаменатель есть единица с одним или несколькими нулями, называется *десятичной.*

Десятичную дробь изображают обычно без знаменателя. Для этого пишут числитель десятичной дроби и отделяют в нем запятой с правой стороны столько цифр, сколько нулей в знаменателе.

При этом иногда приходится приписывать нули.

Примеры. $\frac{25}{10} = 2{,}5$; $\frac{13}{100} = 0{,}13$; $\frac{7}{1000} = 0{,}007$.

Цифры дроби, стоящие справа от запятой, называются *десятичными знаками.*

45. Изменение величины десятичной дроби. Десятичная дробь не изменяет своей величины от приписывания нулей справа или слева от нее. Десятичная дробь увеличивается в 10 раз от перенесения запятой вправо на один десятичный знак и уменьшается в 10 раз от перенесения запятой влево на один десятичный знак.

46. Сложение и вычитание десятичных дробей производится так же, как сложение и вычитание целых чисел.

Примеры.
$$\begin{array}{r} 3{,}125 \\ +\,0{,}15 \\ \hline 3{,}275 \end{array}; \qquad \begin{array}{r} 4{,}5 \\ -\,2{,}35 \\ \hline 2{,}15 \end{array}.$$

47. Умножение. Чтобы умножить десятичные дроби, достаточно, не обращая внимания на запятые, перемножить их как целые числа и в полученном произведении отделить справа запятой столько знаков, сколько их было в множимом и множителе вместе.

Примеры. а) $2{,}25 \cdot 1{,}12 = 2{,}5200 = 2{,}52$;

б) $1{,}35 \cdot 0{,}03 = 0{,}0405$.

48. Деление на целое число. Чтобы разделить десятичную дробь на целое число, сначала делим целую часть делимого на это число. Получим целую часть частного (она может равняться нулю). Затем, не обращая внимания на запятую, присоединяем к остатку первую цифру дробной части делимого и полученное число делим на делитель. Найдем число десятых долей частного. К новому остатку присоединяем следующую цифру дробной части делимого, а если ее нет, то приписываем справа нуль. Разделив это число на делитель, найдем число сотых долей частного. Продолжая этот процесс, придем к точному частному или к приближенному с точностью до 0,1, до 0,01 и т. д. Последнее получится тогда, когда процес деления длится долго или может длиться неограниченно и мы его прерываем на некотором месте.

Примеры. а)
$$\begin{array}{r|l} 2{,}25 & 5 \\ \underline{-\,20} & \underline{0{,}45;} \\ 25 & \\ \underline{-\,25} & \\ 0 & \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r|l} 11{,}3 & 3 \\ \underline{-\,9} & \underline{3{,}76.} \\ 23 & \\ \underline{-\,21} & \\ 20 & \\ \underline{-\,18} & \\ 2 & \end{array}$$

Число 3,76 есть приближенное частное с точностью до 0,01 с недостатком.

49. Деление дроби на дробь. Чтобы разделить десятичную дробь на десятичную дробь, отбрасываем в делителе запятую, а в делимом переносим ее вправо на столько десятичных знаков, сколько их было в дробной части делителя, после чего производим деление дроби на целое число (п. 48). Если в дробной части делимого знаков меньше, чем в дробной части делителя, то приписываем к делимому с правой стороны нули.

Пример. 72,9 : 0,09;
$$\begin{array}{r|l} 7290 & 9 \\ \underline{-\,72} & \underline{810.} \\ 9 & \\ \underline{-\,9} & \\ 0 & \end{array}$$

50. Обращение десятичной дроби в обыкновенную. Способ обращения понятен из примеров:

$$0{,}025 = \frac{25}{1000} = \frac{1}{40}; \quad 4{,}35 = \frac{435}{100} = 4\frac{35}{100} = 4\frac{7}{20}.$$

51. Обращение обыкновенной дроби в десятичную. Чтобы обратить обыкновенную дробь в десятичную, нужно числитель разделить на знаменатель по правилу п. 48. При этом, если знаменатель содержит простые множители, отличные от 2 и 5, и эти множители не сокращаются с числителем, то процесс деления не может быть доведен до конца. В таком случае говорят, что обыкновенная дробь разлагается в *бесконечную десятичную дробь* и обращение обыкновенной дроби в десятичную возможно только приближенно.

Примеры. а) $\frac{3}{40} = 0{,}075$; б) $\frac{1}{7} = 0{,}1428\ldots$

§ 8. Периодические дроби

52. Периодическая дробь. *Периодической десятичной дробью* называется такая бесконечная десятичная дробь, у которой одна или несколько цифр неизменно повторяются в одной и той же последовательности.

Цифра или совокупность цифр, которые повторяются в периодической дроби, называются ее *периодом*. Если период дроби начинается сразу после запятой, то она называется *чистой периодической дробью*. В противном случае — *смешанной*.

Примеры. а) 3, 121212..., запись: 3, (12); б) 2,3555..., запись: 2,3 (5).

Если обыкновенная дробь обращается в бесконечную десятичную дробь, то последняя непременно должна быть периодической, причем при отсутствии у знаменателя дроби, после ее сокращения, множителей 2 и 5 она будет чистой периодической, а при наличии множителей 2 или 5 или обоих — смешанной периодической.

53. Обращение периодической дроби в обыкновенную. 1. Чтобы обратить чистую периодическую дробь в обыкновенную, достаточно ее период сделать числителем, а знаменателем написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде.

Пример. $0{,}(25) = \frac{25}{99}$.

2. Чтобы обратить смешанную периодическую дробь в обыкновенную, достаточно из числа, стоящего после за-

пятой до второго периода, вычесть число, стоящее после запятой до первого периода, и разность сделать числителем, а знаменателем написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, со столькими нулями справа, сколько цифр между запятой и первым периодом (см. п. 97, гл. III).

Пример. $1{,}2(5) = 1\frac{25-2}{90} = 1\frac{23}{90}$.

§ 9. Проценты

54. Процент. *Процентом* числа называется сотая часть этого числа.

55. Нахождение процента данного числа. Чтобы найти некоторое число процентов от данного числа, достаточно данное число разделить на 100 и умножить на число процентов.

Пример. В классе 25 учеников. 40% класса — отличники. Сколько отличников в классе?

Решение. $\frac{25 \cdot 40}{100} = 10$ (учеников).

56. Нахождение числа по данным его процентам. Чтобы найти число по данной величине его процентов, достаточно эту величину разделить на число процентов и умножить на 100.

Пример. Цена метра сукна снизилась на 2,4 руб., что составило 15% цены. Сколько стоил метр сукна до снижения?

Решение. $\frac{2{,}4 \cdot 100}{15} = 16$ (руб.).

57. Процентное отношение двух чисел. Чтобы найти процентное отношение одного числа к другому, достаточно первое число разделить на второе и результат умножить на 100.

Пример. Цех по годовому плану должен выпустить продукции на сумму 1 250 000 руб. За 1-й квартал он выпустил ее на сумму 450 000 руб. На сколько процентов выполнен цехом годовой план к концу 1-го квартала?

Решение. $\frac{450\,000 \cdot 100}{1\,250\,000} = 36(\%)$.

§ 10. Пропорции и пропорциональная зависимость

58. Отношение и пропорция. *Отношением* числа a к числу b называется частное от деления числа a на число b. Числа a и b называются *членами отношения*, причем a — *предыдущим*, а b — *последующим*. Само отношение записывается так: $\frac{a}{b}$ или $a : b$.

Пропорцией называется равенство двух отношений. Например, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. В пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ члены отношений называются членами пропорции, причем b и c называются *средними*, а a и d *крайними* членами пропорции.

59. Основное свойство пропорции. Во всякой пропорции произведение средних членов равно произведению крайних членов, т. е. если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $bc = ad$.

И обратно, если четыре числа таковы, что произведение двух из них равно произведению двух других, то из этих чисел можно составить пропорцию.

При этом предполагается, что по меньшей мере два из них не равны нулю.

Из основного свойства пропорции вытекает правило определения по трем данным членам четвертого неизвестного (*четвертого пропорционального*): средний член пропорции равен произведению крайних, деленному на другой средний; крайний член пропорции равен произведению средних, деленному на другой крайний.

Пример. Найти x, если $\frac{8}{x} = \frac{10}{5}$.

Решение. $x = \frac{8 \cdot 5}{10} = 4$.

60. Перестановка членов пропорции. В каждой пропорции можно переставить: а) средние члены, б) крайние члены, в) средние и крайние, г) крайние на место средних и средние на место крайних. Всего можно получить из данной пропорции 8 пропорций (включая данную).

Пример. Из пропорции $\frac{6}{3} = \frac{8}{4}$ получаем следующие:

$$\frac{6}{8}=\frac{3}{4},\ \frac{4}{3}=\frac{8}{6},\ \frac{4}{8}=\frac{3}{6},\ \frac{3}{6}=\frac{4}{8},$$

а переставив в первых трех отношения, получим еще три:

$$\frac{8}{4}=\frac{6}{3},\ \frac{3}{4}=\frac{6}{8},\ \frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

61. Производные пропорции. Во всякой пропорции: а) сумма членов первого отношения так относится к своему последующему, как сумма членов второго отношения к своему последующему; б) сумма членов первого отношения так относится к своему предыдущему, как сумма членов второго отношения к своему предыдущему; в) разность членов первого отношения так относится к своему последующему, как разность членов второго отношения к своему последующему; г) разность членов первого отношения так относится к своему предыдущему, как разность членов второго отношения относится к своему предыдущему; д) сумма членов первого отношения так относится к их разности, как сумма членов второго отношения относится к их разности.

В общем виде это выглядит так: если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то:

а) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$; б) $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$; в) $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$;

г) $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$; д) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

Возможны и другие производные пропорции.

62. Свойства равных отношений. 1. Если несколько отношений равны между собой, то сумма всех предыдущих их членов так относится к сумме всех последующих, как любой из предыдущих к своему последующему. Иначе, если

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n},$$

то

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

2. Если

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}\ldots=\frac{a_n}{b_n},$$

то

$$\frac{a_1m_1 + a_2m_2 + \ldots + a_nm_n}{b_1m_1 + b_2m_2 + \ldots + b_nm_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n},$$

где m_1, m_2, ..., m_n не могут быть равны нулю все одновременно.

63. Пропорциональная зависимость величин. 1. Две величины называются *прямо пропорциональными*, если при изменении одной из них другая изменяется так, что отношение соответствующих значений этих величин остается неизменным. Прямо пропорциональные величины y и x связаны зависимостью $y = kx$, где k — число, не равное нулю, которое называется *коэффициентом пропорциональности*.

2. Две величины называются *обратно пропорциональными*, если при изменении одной из них другая изменяется так, что произведение соответствующих значений этих величин остается неизменным. Обратно пропорциональные величины y и x связаны зависимостью $yx = k$, где k — некоторое число (не равное нулю).

64. Пропорциональное деление. 1. Чтобы разделить какое-нибудь число на части пропорционально данным числам, надо это число разделить на сумму этих чисел и полученное частное последовательно умножить на каждое из этих чисел.

Пример. Число 90 разделить на три слагаемых пропорционально числам 1, 2 и 3.

Решение. $90 : (1 + 2 + 3) = 90 : 6 = 15$; $15 \cdot 1 = 15$; $15 \cdot 2 = 30$; $15 \cdot 3 = 45$.

Итак, $15 : 30 : 45 = 1 : 2 : 3$.

2. Чтобы разделить какое-нибудь число обратно пропорционально данным числам, надо разделить это число на части прямо пропорционально числам, обратным данным.

Пример. Число 30 разделить на 2 слагаемых обратно пропорционально числам 1 и $\frac{1}{2}$.

Решение. Разделив число 30 прямо пропорционально числам 1 и 2, получим слагаемые 10 и 20.

Итак, $10 : 20 = 1 : 2$.

Глава третья

АЛГЕБРА

§ 1. Рациональные числа

1. Рациональные числа и их сравнение. Числа положительные (целые и дробные), отрицательные (целые и дробные) и нуль называются *рациональными числами*. Всякому положительному (отрицательному) числу a приводят в соответствие отрицательное (положительное) число $-a$. Числа a и $-a$ называются *противоположными*. *Абсолютной величиной положительного числа* называется само число. *Абсолютной величиной отрицательного числа* называется противоположное число. *Абсолютная величина нуля* есть нуль. Числа *равны*, если равны их абсолютные величины и у них одинаковые знаки. Любое положительное число больше нуля и больше любого отрицательного числа. Всякое отрицательное число меньше нуля. Из двух различных отрицательных чисел то меньше, у которого абсолютная величина больше.

Любое рациональное число можно представить как отношение $\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа, причем $n>0$, а следовательно, и в виде бесконечной периодической дроби, чистой или смешанной, при этом конечную десятичную дробь можно рассматривать как периодическую с периодом 0. Обратно, всякая периодическая дробь есть рациональное число.

Пример. Абсолютная величина числа a, т. е. $|a|$, равна a, если $a>0$; равна $-a$, если $a<0$; равна 0, если $a=0$.

2. Сложение. 1. Чтобы сложить числа с одинаковыми знаками, нужно сложить их абсолютные величины и поставить тот же знак.

2. Чтобы сложить числа с разными знаками, достаточно сложить все положительные слагаемые, затем все отрицательные и, взяв разность абсолютных величин найденных сумм (вычитая из большей абсолютной величины меньшую), приписать разности знак той суммы, у которой абсолютная величина больше. Если же абсолютные величины найденных сумм одинаковы, то результат сложения будет равен нулю.

Примеры. а) $(+2)+(+3)=5$; б) $(+3)+(-4)+(+2)=(+5)+(-4)=1$.

Сумма, в которой слагаемыми могут быть положительные и отрицательные числа, а также числа, равные нулю, называется *алгебраической суммой*.

Пример. Сумма $(-3)+(-2)+(+4)$ является алгебраической.

3. Вычитание. Чтобы вычесть число, достаточно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

Пример. $(-12)-(-5)=(-12)+(+5)=-7$.

4. Умножение. При умножении двух чисел умножаются их абсолютные величины и перед произведением ставится знак плюс, если сомножители имеют одинаковые знаки, и знак минус, если они имеют разные знаки. Отсюда легко получаются правило умножения нескольких сомножителей и правило возведения в целую степень.

Примеры. а) $(+3)\cdot(-8)=-24$; б) $(-2)\cdot(-5)=10$, $(-3)^4=81$.

5. Деление. При делении одного числа на другое делится абсолютная величина делимого на абсолютную величину делителя и перед частным ставится знак плюс, если знаки делимого и делителя одинаковы, и знак минус, если они разные.

Примеры. а) $(+4):(+2)=2$; б) $(-6):(+4)=-\frac{3}{2}$.

Замечание. Действия с нулем см. гл. II, п. 16. Основные законы и свойства действий, рассмотренные в гл. II, п. 15, 17—19, справедливы для рациональных чисел.

§ 2. Действия с одночленами

6. Алгебраическое выражение. Выражение, в котором указано, какие действия и в каком порядке нужно произвести над данными числами, обозначенными буквами (или буквами и цифрами), называется *математическим* или *аналитическим выражением*. В частности, оно называется *алгебраическим выражением*, если при этом подразумеваются следующие действия: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в целую степень, извлечение корня (см. гл. II, § 2)[1].

Алгебраическое выражение называется *рациональным*, если среди указанных в нем действий нет извлечения корня из выражений, содержащих буквы. В противном случае оно называется *иррациональным алгебраическим выражением*. Рациональное алгебраическое выражение называется *целым*, если в нем нет действия деления на выражения, содержащие буквы. Если же такое действие имеется, то рациональное выражение называется *дробным*.

Примеры. а) $3a^2 + \frac{1}{2}b$ — целое алгебраическое выражение; б) $a\sqrt{b} + 3$ — иррациональное алгебраическое выражение; в) $\frac{2a-b}{c}$ — дробное алгебраическое выражение.

Алгебраическое выражение, представляющее собой произведение числового множителя и одной или нескольких букв, каждая из которых взята в некоторой положительной степени, называется *одночленом*.

Одно число, обозначенное цифрами или буквой, также может рассматриваться как одночлен. Числовой множитель одночлена обычно называют *коэффициентом*. Он может равняться единице и тогда явно не пишется. Однако любой множитель одночлена можно принять за коэффициент. Таким образом, коэффициент может быть и *буквенный*. Его еще называют *параметром*.

Пример. $7ab^2$, $-\frac{2}{5}b$, $\frac{7}{9}a^3xy$ — одночлены.

7. Равные и подобные одночлены. *Два одночлена равны,*

---

[1] *Численное значение* математического выражения, см. п. 67, гл. III.

если у них равны коэффициенты и они составлены из одинаковых букв с соответственно равными показателями. Одночлены называются *подобными*, если они равны или отличаются только коэффициентами.

Примеры. а) Одночлены $2a^2b^3$ и $\frac{6}{3}a^2b^3$ равны; б) одночлены $2a^3, -3a^3$ и $\frac{1}{2}a^3$ подобны.

8. Сложение и вычитание. 1. Чтобы сложить одночлены, нужно приписать их один к другому с их знаками.

2. Чтобы вычесть одночлен, нужно приписать его к уменьшаемому с противоположным знаком.

Примеры. а) $(-2ab) + (+3b) + (+3c) + (-4a) = -2ab + 3b + 3c - 4a$; б) $(-2c) - (-3a) = -2c + 3a$.

В результате сложения или вычитания одночленов получится алгебраическое выражение, содержащее ряд последовательных сложений и вычитаний, которое является *алгебраической суммой одночленов*. С другой стороны, алгебраическая сумма одночленов называется *многочленом*, а одночлены, входящие в состав многочлена, — *членами многочлена*. Среди членов многочлена могут оказаться подобные. Тогда с целью упрощения выражения их заменяют одним членом, им подобным, с коэффициентом, равным алгебраической сумме коэффициентов заменяемых членов. Такое действие называется *приведением подобных членов*. В результате приведения подобных сумма одночленов иногда может привестись к одночлену. Поэтому одночлены возможно (и целесообразно!) рассматривать как частный случай многочленов.

9. Умножение. 1. При умножении степеней одного и того же основания показатели складываются.

2. При умножении двух одночленов нужно умножить их коэффициенты и приписать к полученному числу как к коэффициенту каждую букву, входящую только в один одночлен, с ее показателем и каждую букву, входящую в оба одночлена, с показателем, равным сумме показателей, с которыми она входит в одночлены.

Примеры. а) $a^5 \cdot a^3 = a^8$; б) $(+3ab^2) \cdot (-2a^2c) = -6a^3b^2c$.

10. Деление. 1. При делении степеней одного и того же основания из показателя делимого вычитается показатель делителя.

2. При делении одночлена на одночлен нужно разделить коэффициент делимого на коэффициент делителя и приписать к полученному числу как к коэффициенту каждую букву, входящую только в делимое, с ее показателем и каждую букву, входящую в делимое и в делитель, с показателем, равным разности показателей, с которыми она входит в делимое и в делитель.

Примеры. а) $a^5 : a^3 = a^2$; б) $(+2a^6b^3c) : (-3a^2b) = -\frac{2}{3}a^4b^2c$.

Если в делителе есть буквы, которых нет в делимом или они есть в делимом, но с показателями меньшими, чем в делителе, то деление невозможно. Это нужно понимать в том смысле, что частное таких одночленов нельзя выразить через одночлен, но оно может быть выражено *алгебраической дробью* (см. § 6).

Пример. $4a^3b : (-2ab^2c) = -\frac{4a^3b}{2ab^2c}$ — алгебраическая дробь.

11. Возведение в целую степень. 1. При возведении степени в степень показатели перемножаются.

2. Степень произведения нескольких сомножителей равна произведению степеней всех этих сомножителей (с тем же показателем).

3. Чтобы возвести одночлен в некоторую степень, достаточно каждый множитель одночлена возвести в эту степень и полученные результаты перемножить.

§ 3. Действия с многочленами

12. Многочлен и его степень. Алгебраическая сумма одночленов называется *многочленом*. Каждый одночлен имеет некоторую степень. *Степенью одночлена*, или *измерением одночлена*, называется сумма показателей всех входящих в него букв. Так, например, одночлен $4a^2b^3c$ имеет степень, равную $2 + 3 + 1 = 6$. *Степенью многочлена*, или *измерением многочлена*, называется степень того члена многочлена, у которого она наибольшая. Так, например, у многочлена $2a^3b^6 + ab + 125$ степень равна 9. Степень свободного члена называют *нулевой* (о нулевой степени см. § 10). Если все члены многочлена имеют одинаковую степень, то многочлен называется *однородным* этой степени. Например, многочлен $5x^2y - 2x^3 + y^3$ — однородный третьей степе-

ни или третьего измерения. Часто приходится иметь дело с многочленами, содержащими только одну букву. Такой многочлен для выполнения некоторых действий целесообразно расположить в порядке убывания или возрастания показателей степеней этой буквы. Расположенный многочлен предполагается *приведенным*, т. е. таким, в котором нет подобных членов.

Пример. $3x^5 - 4x^4 + 5x + 2;$

$2 + 5x - 4x^4 + 3x^5.$

В первой строке примера многочлен *расположен по убывающим степеням* буквы x, а во второй — *по возрастающим*. Член многочлена с наибольшей степенью называется *старшим членом многочлена*, а с наименьшей — *младшим*. В приведенном примере это будут члены $3x^5$ и 2. Два приведенных многочлена *равны*, если они состоят из одинаковых членов. О приведенных многочленах, зависящих от одной буквы, можно сказать так: два многочлена равны, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях буквы.

13. Сложение и вычитание. Чтобы сложить многочлены, нужно сложить все их члены.

2. Чтобы вычесть многочлен, нужно вычесть каждый его член.

14. Умножение. 1. Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные произведения сложить.

2. Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого и полученные произведения сложить.

Пример. $(a + b)(p - q) = ap + bp - aq - bq.$

Произведение приведенных многочленов всегда будет многочленом (не приводящимся к одночлену), так как произведение старших членов перемножаемых многочленов даст старший член произведения, который не будет иметь подобного, а произведение младших членов сомножителей даст младший член произведения, который тоже не будет иметь подобного.

15. Деление. 1. Чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно каждый член делимого разделить на этот одночлен и полученные частные сложить. Приведенный многочлен делится на одночлен в том и только в том случае, когда каждый член многочлена делится на этот одночлен. В про-

тивном случае это частное даст не многочлен, а алгебраическую дробь.

Примеры. а) $(2a^2 - 3a^4) : a = 2a - 3a^3$;

б) $(2a^2 - 3a^4) : b = \frac{2a^2 - 3a^4}{b}$ — алгебраическая дробь.

2. Одночлен на многочлен, вообще говоря, не делится, т. е. частное будет не целое алгебраическое выражение, а алгебраическая дробь. Исключением может быть лишь тот случай, когда многочлен, являющийся делителем, приводится к одночлену и данный одночлен делится на полученный.

Примеры. а) $\frac{a}{a^2 + ab + b^2}$ — алгебраическая дробь;

б) $\frac{a^2}{2a + b - 3b + 2b} = \frac{a^2}{2a} = \frac{1}{2}a.$

3. Разделить многочлен на многочлен — значит найти новый многочлен (в частности, одночлен), который, будучи умноженным на делитель, даст делимое. Однако это далеко не всегда возможно, и тогда частное выражается алгебраической дробью, а про деление говорят, что оно невозможно.

Рассмотрим правило деления многочлена на многочлен на примерах.

Первый случай. Многочлен от одной буквы. Требуется разделить многочлен $6x^4 - 11x^2 + 5x^3 + 9x - 5$ на многочлен $3x^2 + 4x - 5$.

Для этого поступаем следующим образом: а) располагаем многочлены по убывающим степеням буквы x; б) делим первый член делимого $6x^4$ на первый член делителя $3x^2$. Получаем первый (старший) член частного $2x^2$; в) умножаем делитель на первый член частного и результат $6x^4 + 8x^3 - 10x^2$ подписываем под делимым; г) вычитаем из делимого подписанный под ним результат. Получаем первый остаток $-3x^3 - x^2 + 9x - 5$. Если бы он оказался равным нулю, то деление было бы окончено; д) делим первый (старший) член остатка $-3x^3$ на первый член делителя $3x^2$. Получим второй член частного $-x$; е) умножаем делитель на второй член частного и результат $-3x^3 - 4x^2 + 5x$ подписываем под первым остатком; ж) вычитаем полученное выражение из первого остатка. Получаем второй остаток $3x^2 + 4x - 5$; з) делим пер-

вый (старший) член второго остатка $3x^2$ на первый член делителя $3x^2$. Получаем третий член частного 1; и) умножаем делитель на третий член частного и результат $3x^2 + 4x - 5$ подписываем под вторым остатком; к) вычитаем последнее выражение из второго остатка. Получаем нуль. Деление окончено.

Запись:

$$\begin{array}{r|l} 6x^4+5x^3-11x^2+9x-5 & 3x^2+4x-5 \\ \underline{-\,6x^4+8x^3-10x^2} & \underline{} \\ -3x^3-x^2+9x-5 & 2x^2-x+1 \\ \underline{-\,-3x^3-4x^2+5x} & \\ 3x^2+4x-5 & \\ \underline{-\quad 3x^2+4x-5} & \\ 0 & \end{array}$$

Второй случай. Многочлен зависит от двух или нескольких букв. Требуется разделить многочлен $y^2x^2 + 2yx + 1 + 2yzx^2 + z^2x^2 + 2zx$ на многочлен $1 + xz + yx$.

Выберем какую-нибудь букву, например x, за главную и расположим многочлены по убывающим степеням буквы x. Тогда остальные буквы y и z вместе с числами образуют коэффициенты, и деление таких многочленов пойдет по предыдущему правилу только с той разницей, что для получения частного придется делить не *числовые*, а *буквенные* коэффициенты делимого и делителя.

Запись:

$$\begin{array}{r|l} (y^2+2yz+z^2)x^2+2(y+z)x+1 & (y+z)x+1 \\ \underline{-\,(y^2+2yz+z^2)x^2+(y+z)x} & \underline{} \\ (y+z)x+1 & (y+z)x+1 \\ \underline{-\quad (y+z)x+1} & \\ 0 & \end{array}$$

Очевидно, что деление многочленов без остатка выполнить нельзя, например, в следующих случаях: если показатель главной буквы в старшем члене делимого меньше показателя той же буквы в старшем члене делителя, если показатель главной буквы в младшем члене делимого меньше показателя той же буквы в младшем члене делителя.

16. Деление с остатком. Под делением многочлена M на многочлен N с остатком понимается отыскание таких многочленов Q и R, для которых выполняется *тождество* (см. гл. III, п. 68):

$$M = NQ + R,$$

где степень R меньше степени N. Многочлен Q называется *частным*, а R — *остатком*.

Словами это формулируется так: делимое равно делителю, умноженному на частное, плюс остаток.

Деление с остатком справедливо для любых многочленов. Например, деля по обычным правилам многочлен $x^2 + 3x + 1$ на $x + 1$, получим частное $x + 2$ и остаток -1, поэтому можно написать:

$$x^2 + 3x + 1 = (x + 1)(x + 2) - 1,$$

или

$$\frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} = x + 2 - \frac{1}{x + 1}.$$

17. Деление на $x - a$. Остаток от деления многочлена на $x - a$ равен значению многочлена при $x = a$ *(теорема Безу)*.

Заметив, что число a называется корнем многочлена, если значение многочлена при $x = a$ равно нулю, можно так сформулировать практически удобный признак делимости, вытекающий из теоремы Безу. Для делимости многочлена на двучлен $x - a$ необходимо и достаточно, чтобы a было корнем этого многочлена.

Отсюда легко получить:

$x^m - a^m$ делится на $x - a$ при любых натуральных m;
$x^m - a^m$ делится на $x + a$ при четных m;
$x^m + a^m$ делится на $x + a$ при нечетных m.

18. Возведение в целую степень. Только для возведения многочлена в квадрат и для возведения двучлена в любую степень существуют практически удобные правила. Они помещены в следующем параграфе (§ 4).

§ 4. Формулы сокращенного умножения и деления

19. Возведение в степень двучлена.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}b^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}a^{m-n}b^n + \ldots + b^m.$$
$$(a-b)^m = a^m - ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}b^2 + \ldots +$$
$$+(-1)^n \cdot \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}a^{m-n}b^n + \ldots + (-1)^m b^m.$$

20. Возведение в квадрат многочлена.

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2 = a^2{}_1+a^2{}_2+\ldots+a^2{}_n + 2a_1a_2+\ldots+2a_{n-1}a_n.$$

Квадрат многочлена равен сумме квадратов всех его членов, сложенной с суммой всевозможных удвоенных произведений его членов, взятых по два.

Пример. $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$.

21. Разности и суммы степеней.

$$a^2-b^2 = (a-b)(a+b).$$
$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2).$$
$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2).$$
$$a^m-b^m = (a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1}).$$
$$a^m-b^m = (a+b)(a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+\ldots-b^{m-1}).$$

m—четное.

$$a^n+b^m = (a+b)(a^{m-1}-a^{n-2}b+a^{m-3}b^2-\ldots+b^{m-1}).$$

m—нечетное.

§ 5. Разложение многочлена на множители

22. Приводимые многочлены. Преобразование многочлена к виду произведения многочленов называется *разложением многочлена на множители*. Если многочлен может быть разложен на множители, то он называется *приводимым*, а в противном случае — *неприводимым* или *неразложимым* на множители. Вопрос о разложении многочлена считается решенным, если этот многочлен представлен в виде произведения неприводимых (вещественных) многочленов, среди которых, в частности, могут быть и одночлены, не приводящиеся к единице.

Ниже перечислены простейшие способы разложения многочлена на множители.

23. Вынесение за скобки. Если все члены многочлена имеют общий множитель, то его можно вынести за скобки.

Примеры. а) $2x^3a - 4x^2a^2 = 2x^2a\,(x - 2a)$;
б) $x^2(x + 3) + y^2\,(x + 3) = (x + 3)\,(x^2 + y^2)$.

24. Способ группировки. Может случиться, что отдельные группы членов многочлена имеют общие множители, после вынесения которых за скобки в скобках окажутся одинаковые выражения, т. е. окажется многочленный общий множитель.

Пример. $2ab - ac + c^2 - 2bc = (2ab - ac) + (c^2 - 2bc) = a\,(2b - c) - c\,(2b - c) = (2b - c)\,(a - c)$.

25. Разложение квадратного трехчлена. Квадратным трехчленом называется выражение вида $ax^2 + bx + c$. Если он раскладывается на множители, то разложение легко осуществить приемами, сущность которых разъясняется на примерах, приводимых ниже.

Первый случай. $a = 1$ и трехчлен имеет вид $x^2 + px + q$. В этом случае число p нужно разбить на такие два слагаемых, чтобы произведение их дало q. После этого достаточно применить способ группировки.

Примеры. а) $x^2 + 8x + 12 = x^2 + (6 + 2)x + 12 = x^2 + 6x + 2x + 12 = x(x + 6) + 2(x + 6) = (x + 6)\,(x + 2)$; б) $x^2 - 2x - 8 = x^2 + (-4 + 2)x - 8 = x^2 - 4x + 2x - 8 = x(x - 4) + 2(x - 4) = (x - 4)\,(x + 2)$.

Второй случай. Число a — любое. Тогда в трехчлене $ax^2 + bx + c$ число b нужно разбить на два слагаемых так, чтобы произведение их дало ac, и далее поступать так же, как в первом случае.

Примеры.

а) $3x^2 + 4x + 1 = 3x^2 + (3 + 1)\,x + 1 = 3x^2 + 3x + x + 1 = 3x\,(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)\,(3x + 1)$;

б) $6x^2 - x - 1 = 6x^2 + (-3 + 2)\,x - 1 = 6x^2 - 3x + 2x - 1 = 3x\,(2x - 1) + (2x - 1) = (2x - 1)\,(3x + 1)$.

В п. 73 дан еще один способ разложения квадратного трехчлена на множители.

26. Применение формул сокращенного умножения и деления.

$$9x^2 - 16 = (3x - 4)(3x + 4).$$
$$4x^2 + 20xy + 25y^2 = (2x + 5y)^2.$$
$$8x^3 - 27a^3b^3 = (2x - 3ab)(4x^2 + 6abx + 9a^2b^2).$$
$$27a^3 + 27a^2 + 9a + 1 = (3a + 1)^3.$$

27. Разные случаи разложений на множители.

$$x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = (x^3 - 1) + (5x^2 - 5) + (3x - 3) =$$
$$= (x - 1)(x^2 + x + 1) + 5(x^2 - 1) + 3(x - 1) =$$
$$= (x - 1)(x^2 + x + 1 + 5x + 5 + 3) =$$
$$= (x - 1) \cdot (x^2 + 6x + 9) = (x - 1)(x + 3)^2$$
$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 -$$
$$- x^2y^2 = (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy).$$
$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = (x^4 + y^4 -$$
$$- 2x^2y^2) - (2x^2z^2 - 2y^2z^2) + z^4 - 4y^2z^2 = (x^2 - y^2)^2 -$$
$$- 2(x^2 - y^2)z^2 + z^4 - 4y^2z^2 = (x^2 - y^2 - z^2)^2 - 4y^2z^2 =$$
$$= (x^2 - y^2 - z^2 + 2yz)(x^2 - y^2 - z^2 - 2yz) = [x^2 -$$
$$- (y - z)^2][x^2 - (y + z)^2] = (x + y - z)(x - y +$$
$$+ z)(x + y + z)(x - y - z).$$

§ 6. Алгебраические дроби

28. Алгебраическая дробь. *Алгебраической дробью* называется частное от деления двух целых алгебраических выражений. Делимое называется *числителем*, а делитель — *знаменателем*. Арифметические дроби являются частным случаем алгебраических. Они получаются из алгебраических, когда числитель и знаменатель суть целые положительные числа. Основные действия над алгебраическими дробями производятся так же, как и над обыкновенными арифметическими. Однако там, где для арифметических дробей приходится разлагать составные числа на простые множители, для алгебраических дробей приходится разлагать многочлены на множители.

Ниже эти действия иллюстрируются примерами.

Замечание. Частное от деления двух любых математических выражений, когда употреблен знак деления в виде черты $\left(\text{например, } \frac{a-b}{\sqrt{c}}\right)$, также принято называть *дробью*. При этом делимое называют числителем, а делитель — знаменателем. Однако эта дробь не является алгебраической.

29. Основное свойство дроби.

$$\frac{A}{B} = \frac{Am}{Bm}, \text{ где } m \neq 0.$$

30. Сокращение дробей.

$$\frac{-4a^2x^3b}{-2a^3b} = \frac{2x^3}{a}.$$

$$\frac{x^3 - 2ax^2 + a^2x}{bx - ab} = \frac{x(x-a)^2}{b(x-a)} = \frac{x(x-a)}{b}.$$

31. Приведение дробей к общему знаменателю.

$$\frac{a}{b} \text{ и } \frac{c}{d}; \quad \frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}, \quad \frac{c}{d} = \frac{cb}{bd}.$$

$$\frac{3a}{x^2b} \text{ и } \frac{b}{xa^2}; \quad \frac{3a}{x^2b} = \frac{3a^3}{x^2a^2b}, \quad \frac{b}{xa^2} = \frac{xb^2}{x^2a^2b}.$$

$$\frac{1}{x^2-1} \text{ и } \frac{1}{x^2-2x+1}; \quad \frac{1}{x^2-1} =$$

$$= \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{(x-1)^2(x+1)},$$

$$\frac{1}{x^2-2x+1} = \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{(x-1)^2(x+1)}.$$

32. Сложение и вычитание.

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m} = \frac{a+b-c}{m}.$$

$$\frac{2}{a} - \frac{1}{b} = \frac{2b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{2b-a}{ab}.$$

$$\frac{2+a}{1+2a} + \frac{a-2}{1-2a} - \frac{6a+1}{4a^2-1} =$$

$$= \frac{(2+a)(1-2a) + (a-2)(1+2a) + 6a + 1}{1-4a^2} = \frac{1}{1-4a^2}.$$

33. Умножение.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

$$\frac{x^2a}{4b} \cdot \frac{2b}{ax} = \frac{x^2a \cdot 2b}{4b \cdot ax} = \frac{x}{2}.$$

$$\frac{x^2-1}{x^2} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{(x^2-1)x}{x^2(x+1)} = \frac{x-1}{x}.$$

34. Деление.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

$$\frac{x^2+2x}{a+b} : \frac{x^3+2x^2}{a^2+2ab+b^2} = \frac{x(x+2)}{a+b} \cdot \frac{(a+b)^2}{x^2(x+2)} = \frac{a+b}{x}.$$

35. Возведение в целую степень.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

§ 7. Вещественные, или действительные, числа

36. Измерение отрезков. Если в отрезке AB содержится целое число (m) раз $\frac{1}{n}$ часть другого отрезка, принятого за единицу, то эти отрезки называются *соизмеримыми*. Число $\frac{m}{n}$ выражает длину отрезка AB при данной единице измерения. Существуют отрезки, в которых никакая часть единичного отрезка не укладывается целое число раз. Такие отрезки называются *несоизмеримыми* с этой единицей. Например, если катет равнобедренного треугольника равен единице, то квадрат гипотенузы равен 2. Но нет такой дроби $\frac{m}{n}$, квадрат которой был бы равен 2. Поэтому гипотенуза и катет равнобедренного треугольника несоизмеримы.

37. Иррациональные числа. Чтобы иметь возможность всегда говорить о длине отрезка, в том числе и о длине несоизмеримого с единицей отрезка (но не только по этой причине!), *расширяют понятие числа*, вводят в рассмотрение *новые числа — иррациональные*.

Всякое рациональное число изображается дробью $\frac{m}{n}$, где m — любое целое число или 0, а n — натуральное. Такую дробь можно представить или конечной десятичной дробью, или периодической. Но всякая конечная дробь также может быть представлена периодической дробью, причем двумя способами. Например, можно написать:

$$0{,}12 = 0{,}12000\ldots$$
$$0{,}12 = 0{,}11999\ldots$$

В первом случае период равен 0, а во втором 9. Первое равенство очевидно, а в справедливости второго легко убедиться с помощью правила обращения периодической дроби в простую (гл. II, п. 53). Поэтому можно сказать, что *всякое рациональное число может быть представлено бесконечной периодической десятичной дробью.*

В отличие от рационального числа *всякая бесконечная непериодическая дробь называется иррациональным числом.*

Иррациональное число считается *данным*, если известно правило, с помощью которого можно найти любое число его десятичных знаков. Иррациональные числа бывают положительные и отрицательные. Если в бесконечной десятичной дроби, изображающей положительное иррациональное число, сохранить n первых десятичных знаков и откинуть все последующие, то полученная конечная десятичная дробь называется *десятичным приближением* этого иррационального числа с точностью до $\frac{1}{10^n}$ по недостатку. Увеличив на 1 последний десятичный знак приближенного значения числа по недостатку, получим его приближенное значение с точностью до $\frac{1}{10^n}$ по избытку.

38. Сравнение иррациональных чисел. Два иррациональных числа считаются *равными*, если они изображаются одной и той же десятичной дробью, т. е. если целые части и десятичные знаки дробей, которыми они выражены (стоящие на одинаковых местах после запятой), равны. Из двух положительных чисел *больше* то, у которого целая часть больше. Если же целые части у этих чисел равны, то бо́льшим считается то, у которого первый по порядку десятичный знак будет бо̀льшим, а все предшествующие ему одинаковы (т. е. первые десятичные знаки равны между собой, вторые равны между собой и т. д.). Так же сравниваются положительные рациональные и иррациональные числа.

Определение абсолютной величины рационального числа и сравнение положительных и отрицательных рациональных чисел (гл. III, п. 1) сохраняются без каких-либо изменений и для иррациональных чисел.

39. Сложение и вычитание иррациональных чисел. *Суммой* двух положительных чисел (*слагаемых*) называется число (рациональное или иррациональное), которое больше всех сумм любых приближенных их значений по

недостатку, но меньше всех сумм любых приближенных значений по избытку.

Такое число *всегда существует*, и притом только одно. Действие, с помощью которого находится сумма, называется *сложением*.

Вычитание иррациональных чисел определяется так же, как и рациональных.

40. Умножение и деление иррациональных чисел. *Произведением* двух иррациональных чисел (*сомножителей*) называется число (рациональное или иррациональное), которое больше всех произведений любых приближенных их значений по недостатку, но меньше произведений любых приближенных значений по избытку.

Такое число *всегда существует*, и притом только одно. Действие, с помощью которого находится произведение, называется *умножением*.

Деление иррациональных чисел определяется так же, как и рациональных.

41. Возведение в степень иррационального числа. *Возвести* иррациональное число во вторую, в третью и т. д. (вообще *в целую*) *степень* — значит повторить это число сомножителем два, три и т. д. раза.

42. Вещественные числа. *Вещественными, или действительными, числами* называются все рациональные и иррациональные числа. Если условиться конечные дроби выражать в виде бесконечной только одним способом (см. п. 37), т. е. считать всегда периодом дроби 0 (или 9), то тогда все сказанное о приближенных значениях иррациональных чисел, их сравнении и действиях с ними можно распространить и на вещественные числа.

З а м е ч а н и е. Действия с нулем (гл. II, п. 16) и основные законы действий (гл. II, п. 15) справедливы также для иррациональных и вещественных чисел.

43. Геометрическое изображение вещественных чисел. Возьмем произвольную прямую. Она имеет два противоположных направления. Будем одно из них считать *положительным*. Такая прямая, на которой выбрано положительное направление, называется *осью*. Положительное направление на оси обозначается стрелкой (рис. 1).

Выберем линейную единицу для измерения длин и отметим какую-нибудь точку O на оси. Тогда всякому вещественному числу a можно привести в соответствие точку на этой оси, находящуюся от точки O на расстоянии $|a|$

с положительной стороны от точки O, если $a > 0$, и с отрицательной стороны, если $a < 0$. Наоборот, всякой точке оси будет соответствовать некоторое вещественное число. Ось, служащая для изображения чисел, называется *числовой осью*.

44. Алгебраические и трансцендентные числа. Корень степени n из рационального числа, когда это число не является степенью n другого рационального числа, дает пример иррационального числа. Про такое число говорят, что оно *выражается через радикалы* (см. гл. III, п. 45). Но не все иррациональные числа выражаются через радикалы. Например, известное из геометрии число $\pi = 3{,}14159\ldots$ есть иррациональное, но оно не может быть выражено через радикалы. Числа, являющиеся корнями алгебраических уравнений (п. 68) с целыми коэффициентами, называются *алгебраическими*. Алгебраические числа могут быть рациональными, но могут быть и иррациональными. В последнем случае они, как правило, не выражаются через радикалы, если являются корнями уравнений степени выше четвертой. Если иррациональное число не может быть корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, то оно называется *трансцендентным*.

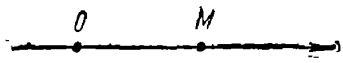

Рис. 1.

Приведенное выше число π и является трансцендентным числом. Десятичные логарифмы целых чисел (не являющихся целой степенью 10) также представляют собой трансцендентные числа.

§ 8. Действия с корнями (радикалами)

45. Определение корня. *Корнем* m-й степени из вещественного числа a называется такое число, m-я степень которого равна a. Корень обозначается так: $\sqrt[m]{a}$. Символ $\sqrt{\ }$ называется *знаком корня* или *знаком радикала*, число a — *подкоренным числом*, m — *показателем корня*. Число m—целое, положительное и больше единицы. Само действие отыскания корня называется *извлечением корня*.

Таким образом, по определению, если $\sqrt[m]{a} = x$, то $x^m = a$. Или: $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$.

Пример. $\sqrt{4} = \pm 2$, так как $(\pm 2)^2 = 4$.

Арифметическим корнем степени m из неотрицательного числа a называется неотрицательное число x, m-я степень которого равна a, т. е. $x^m = a$.

Для неотрицательного числа существует арифметический корень любой степени, и притом единственный.

Пример. Для $\sqrt{x^2}$ арифметический корень есть абсолютная величина x, т. е.

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

В теории комплексных чисел доказывается, что $\sqrt[m]{a}$ имеет m различных значений *вещественных или комплексных* (см. гл. III, п. 65).

Что касается вещественных корней, то о них известно следующее: а) корень четной степени из положительного числа имеет два значения, равные по абсолютной величине и различные по знаку; б) корень нечетной степени из положительного числа имеет одно значение — положительное; в) корень нечетной степени из отрицательного числа имеет одно значение — отрицательное; г) корень четной степени из отрицательного числа не существует.

Действия с корнями, рассматриваемые в элементарной алгебре, основаны на свойствах, изложенных ниже, которые *справедливы для арифметических корней*. В основе доказательства этих свойств лежит следующее:

Если $A^m = B^m$, то и $A = B$ при условии, что A есть арифметический корень $\sqrt[m]{A^m}$, а B—арифметический корень $\sqrt[m]{B^m}$.

Поэтому в пунктах 46—55 числа a и b предполагаются положительными.

46. Приведение корней к общему показателю. Величина корня не изменится, если подкоренное количество возвести в степень n и одновременно показатель корня умножить на число n: $\sqrt[m]{a^p} = \sqrt[mn]{a^{pn}}$.

Пример. Привести корни $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$ к общему показателю.

Решение. $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$, $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$.

47. Сокращение показателя корня и показателя степени подкоренного выражения. Если подкоренное выражение есть степень, показатель которой имеет общий множитель с показателем корня, то на него можно разделить оба показателя:

$$\sqrt[mn]{a^{pn}} = \sqrt[m]{a^{p}}.$$

Пример. В выражении $\sqrt[15]{32}$ сократить показатель корня и показатель степени подкоренного выражения.

Решение. $\sqrt[15]{32} = \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[3]{2}.$

48. Умножение. Корень из произведения нескольких сомножителей равен произведению корней той же степени из этих сомножителей:

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}.$$

Обратно: $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}.$

По этому правилу умножаются корни одинаковой степени. Если требуется умножить корни с различными показателями, то корни нужно предварительно привести к общему показателю.

Примеры. а) $\sqrt[3]{ab} \cdot \sqrt[3]{3a} = \sqrt[3]{3a^2b}$; б) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{4^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 4^2} = \sqrt[6]{27 \cdot 16} = \sqrt[6]{432}$.

49. Вынесение множителя из-под знака корня.

$$\sqrt[m]{a^m b} = a\sqrt[m]{b}.$$

Замечание. Если m — четное и $a < 0$, то последняя формула запишется так:

$$\sqrt[m]{a^m b} = -a\sqrt[m]{b}.$$

Оба случая можно обьединить одной формулой:

$$\sqrt[m]{a^m b} = |a|\sqrt[m]{b}.$$

Пример. $\sqrt[7]{640} = \sqrt[7]{128 \cdot 5} = \sqrt[7]{2^7 \cdot 5} = 2\sqrt[7]{5}.$

50. Введение множителя под знак корня.

$$a\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m b}.$$

Замечание. Если $a < 0$ и m — четное, то $a\sqrt[m]{b} = -\sqrt[m]{a^m b}$.

51. Деление. Корень из частного равен частному от деления корня той же степени из делимого на корень той же степени из делителя:

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

Обратно: $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$.

Если требуется разделить корни с различными показателями, то их нужно предварительно привести к общему показателю.

Примеры. а) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{4}{2}} = \sqrt[3]{2}$;

б) $\dfrac{\sqrt[4]{4a^3b}}{\sqrt{2a}} = \dfrac{\sqrt[4]{4a^3b}}{\sqrt[4]{(2a)^2}} = \sqrt[4]{\dfrac{4a^3b}{4a^2}} = \sqrt[4]{ab}.$

52. Освобождение подкоренного выражения от знаменателя.

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\frac{ab^{m-1}}{b^m}} = \frac{\sqrt[m]{ab^{m-1}}}{b};$$

Пример. $\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 3}{3^2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

53. Возведение в степень. Чтобы возвести корень в степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное количество (не меняя показатель корня): $\left(\sqrt[m]{a^p}\right)^n = \sqrt[m]{a^{pn}}$.

Пример. $\left(\sqrt[5]{2}\right)^3 = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}$.

54. Извлечение корня. Чтобы извлечь корень из корня, нужно перемножить их показатели, не меняя подкоренного числа:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Пример. $\sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$.

55. Освобождение знаменателя дроби от радикалов. Это преобразование называют также *уничтожением иррациональности в знаменателе.* Рассмотрим простейшие приемы его.

Примеры.

а) $$\frac{a}{\sqrt[m]{b}} = \frac{a\sqrt[m]{b^{m-1}}}{\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{b^{m-1}}} = \frac{a\sqrt[m]{b^{m-1}}}{\sqrt[m]{b^m}} = \frac{a\sqrt[m]{b^{m-1}}}{b};$$

б) $$\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a - b};$$

в) $$\frac{1}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})} =$$
$$= \frac{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^3} \pm \sqrt[3]{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a \pm b}.$$

56. Сложение и вычитание. Сложение и вычитание радикалов производятся по тем же правилам, что и сложение и вычитание одночленов. При этом также делают приведение подобных членов (радикалов). *Подобными радикалами* называются радикалы, у которых подкоренные выражения и показатели радикалов одинаковы. Для обнаружения подобия радикалов их приводят к простейшему виду. Чтобы привести радикал к простейшему виду, нужно: а) вынести из-под знака радикала те множители, из которых корень извлекается точно; б) освободить подкоренное выражение от знаменателя; в) сократить показатель корня с показателем степени подкоренного выражения, если это возможно.

Пример. $2\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{32} + 8\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 2\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{8 \cdot 4} +$
$+ 8 \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{4} + 4 = 4.$

Приведение радикалов к простейшему виду и приведение подобных радикалов иногда производят и при других действиях над радикалами (умножение, деление и т. д.).

Если нужно сложить, вычесть или перемножить алгебраические суммы радикалов, то эти действия производят по правилам сложения, вычитания и умножения многочленов.

В заключение отметим следующую формулу, часто используемую при преобразованиях выражений, содержащих квадратные радикалы:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Здесь, как и раньше, корни считаются арифметическими и, следовательно, $A>0, B>0$ и $A^2>B$.

Знак перед вторым слагаемым в правой части равенства нужно взять такой же, как и перед $\sqrt{B}$ в левой части.

Пример. $\sqrt{3\sqrt{3}-2\sqrt{6}}=\sqrt{3\sqrt{3}-\sqrt{24}}=$

$$=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{(3\sqrt{3})^2-24}}{2}}-$$

$$-\sqrt{\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{(3\sqrt{3})^2-24}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{2\sqrt{3}}-\sqrt{\sqrt{3}}=$$

$$=\sqrt[4]{12}-\sqrt[4]{3}.$$

§ 9. Извлечение квадратного корня из числа

57. Извлечение корня из целого числа. Требуется извлечь квадратный корень из числа 74 529.

Для этого: 1) разбиваем число на грани справа налево по две цифры в каждой (7′45′29); 2) извлекаем квадратный корень из первой грани (7) и получаем первую цифру корня (2); 3) вычитаем из первой грани (7) квадрат первой цифры корня (4), к остатку (3) сносим вторую грань (45) и число десятков (34) полученного числа (345) делим на удвоенную первую цифру корня (4); 4) целую часть найденного частного (8) подвергаем испытанию. Для этого к числу (4), равному удвоенной первой цифре корня, приписываем испытуемую цифру (8), умножаем полученное число (48) на испытуемую цифру (8) и результат (384) вычитаем из числа (345), полученного присоединением к остатку (3) второй

грани (45). Так как при этом разность получается отрицательной (а нужно, чтобы она была положительной или нулем), то испытуемая цифра (8) не годится. Уменьшаем ее на единицу и новое число (7) испытываем тем же способом. В результате испытания убеждаемся, что новое испытуемое число (7) годится и оно будет второй цифрой корня.

Следующие цифры корня определяются тем же способом:

$$\sqrt{7'45'29} = 273$$

	4	
47	34′5	
7	32 9	
543	162′9	
3	1629	

58. Извлечение корня из правильной десятичной дроби. Чтобы извлечь корень квадратный из правильной десятичной дроби, разбиваем число, стоящее после запятой, на грани слева направо по две цифры в каждой, причем если в крайней правой окажется одна цифра, то приписываем справа нуль. Затем пишем в корне нуль целых, а для определения дробной части корня поступаем с числом, разбитым на грани так, как поступали при извлечении корня из целого числа (п. 57):

$$\sqrt{0{,}01'56'25} = 0{,}125$$

	1	
22	5′6	
2	44	
245	122′5	
5	1225	
	0	

59. Извлечение корня из неправильной десятичной дроби. Разбиваем целую часть дроби на грани справа налево (см. п. 57), а дробную часть — слева направо (см. п. 58). Затем извлекаем корень из подкоренного числа как из целого (не обращая внимания на запятую). Запятую в корне нужно поставить после той цифры, которая получилась в результате использования последней грани целой части подкоренного числа в процессе извлечения из него корня.

$$\sqrt{4'71,32'41} = 21,71$$

	4
41	7'1
1	4 1
427	30 3'2
7	2989
4341	4 34'1
1	4 34 1
	0

60. Извлечение корня из числа с точностью до 1; 0,1; 0,01 и т. д.

$$\sqrt{2} = 1,414...$$

	1
24	10'0
4	96
281	40'0
1	28 1
2824	1190'0
4	11296
	604

Числа 1; 1,4; 1,41; 1,414 являются соответственно значениями $\sqrt{2}$ с точностью до 1; 0,1; 0,01; 0,001 с недостатком.

Значения $\sqrt{2}$ с точностью до 1; 0,1; 0,01; 0,001 с избытком будут соответственно 2; 1,5; 1,42; 1,415.

§ 10. Действия со степенями

61. Определение степени.

1) $a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ раз}}$, n — натуральное число.

2) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, m и n — натуральные числа, $n > 1$, а корень арифметический.

3) $a^0 = 1$, $a \neq 0$.

4) a^x, где x — положительное иррациональное число и $a > 0$.

Если $a > 1$, то под a^x понимают такое число, которое больше всякой степени a^{x_1}, где x_1—любое рациональное приближение x, взятое с недостатком, и меньше всякой степени a^{x_2}, где x_2—любое рациональное приближение x, взятое с избытком, т. е.

$$a^{x_1} < a^x < a^{x_2}.$$

Такое число a^x существует, и оно единственно. Если $a < 1$, то под a^x понимается число, удовлетворяющее соотношению:

$$a^{x_2} < a^x < a^{x_1}. \text{ При } a = 1 \text{ и } a^x = 1.$$

5) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, где x—любое вещественное число.

62. Действия со степенями.

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.
2) $a^x : a^y = a^{x-y}$.
3) $(a^x)^y = a^{xy}$.
4) $\sqrt[y]{a^x} = a^{\frac{x}{y}}$.
5) $(ab)^x = a^x b^x$.
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

Все перечисленные действия выполнимы для любых вещественных чисел x и y, за исключением действия 4, где принято считать y натуральным ($\neq 1$), хотя можно было бы распространить понятие $\sqrt[y]{a^x}$ на любые значения $y \neq 0$.

§ 11. Комплексные числа

63. Основные понятия и определения. 1. Как известно, корень четной степени из отрицательного числа не существует (среди вещественных чисел). Таким образом, для того чтобы равенство $x^2 = -1$ было возможно, недостаточно вещественных чисел. Нужно *расширить понятие числа*, ввести в рассмотрение *новые числа*. Предполагая, что такое расширение возможно, обозначим число, удовлетворяющее равенству $x^2 = -1$, буквой i. Оно называется *мнимой единицей*. Таким образом,

$$i^2 = -1.$$

2. *Комплексным числом* называется выражение (символ) вида $a + bi$. Здесь a, b —вещественные числа, а i — мнимая единица. Число a называется *вещественной частью*

комплексного числа, а число b — *мнимой частью*. Комплексные числа $a + bi$ и $a_1 + b_1 i$ называются *равными*: $a + bi = a_1 + b_1 i$, если $a = a_1$ и $b = b_1$. Если мнимая часть комплексного числа равна нулю, т. е. если оно имеет вид $a + 0 \cdot i$, то его *условились* считать равным вещественному числу a. Таким образом, всякое вещественное число является частным случаем комплексного. Комплексные числа $a + bi$ и $a - bi$ называются *сопряженными*. Понятий «больше» и «меньше» для комплексных чисел не существует. Над комплексными числами производятся такие же действия, как и над вещественными.

3. *Суммой* двух комплексных чисел $a + bi$ и $a_1 + b_1 i$ называется число $(a + a_1) + (b + b_1)i$. Так производится *сложение* комплексных чисел. Отсюда вытекает, что сумма сопряженных чисел $a + bi$ и $a - bi$ есть вещественное число, равное $2a$. Отсюда же вытекает, что комплексное число $a + bi$ можно рассматривать как сумму вещественного числа a и *чисто мнимого числа* bi.

Примеры. а) $(4 + 2i) + (-3 + i) = 1 + 3i$;
б) $(2 - i) + (1 + i) = 3$.

4. *Разностью* комплексных чисел $a + bi$ и $a_1 + b_1 i$ называется число $(a - a_1) + (b - b_1)i$. Так производится *вычитание* комплексных чисел.

Пример. $(1 - i) - (2 - 3i) = -1 + 2i$.

Вычитание есть действие, обратное сложению, посредством которого по данной сумме (*уменьшаемое*) и данному слагаемому (*вычитаемое*) отыскивается другое слагаемое (*разность*).

5. *Произведением* двух комплексных чисел $a + bi$ и $a_1 + b_1 i$ называется число $(aa_1 - bb_1) + (ab_1 + a_1 b)i$. Так производится *умножение* комплексных чисел (сомножителей). Из определения следует, что для умножения комплексных чисел достаточно перемножить их как алгебраические биномы (двучлены) и в полученном результате положить $i^2 = -1$.

Пример. $(2 + i)(3 - i) = 7 + i$.

Очевидно, произведение сопряженных чисел $a + bi$ и $a - bi$ есть вещественное число, равное $a^2 + b^2$.

6. *Частным* от деления комплексного числа $a + bi$ на число $a_1 + b_1 i$ называется число

$$\frac{aa_1 + bb_1}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{a_1 b - ab_1}{a_1^2 + b_1^2}\, i.$$

Практически и деление комплексных чисел производят по правилам преобразования биномов с соблюдением условия $i^2 = -1$.

Пример. $(3-i):(1+i)=\frac{3-i}{1+i}=\frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=$

$=\frac{2-4i}{2}=1-2i.$

Деление есть действие, обратное умножению, посредством которого по данному произведению (*делимое*) и данному сомножителю (*делитель*) отыскивается другой сомножитель (*частное*).

7. Возведение комплексного числа в целую степень производится так:

$$(a+bi)^n=\underbrace{(a+bi)(a+bi)\ldots(a+bi)}_{n\text{ раз}}.$$

$$(a+bi)^{-n}=\frac{1}{(a+bi)^n}.$$

Здесь n — натуральное число. Умножение можно производить последовательно. Кроме того, принимается $(a+bi)^\circ=1$.

8. При выполнении изложенных выше действий над комплексными числами можно руководствоваться таким правилом: над комплексными числами можно произвести соответствующие действия по правилам действий над алгебраическими выражениями и в результате положить $i^2=-1$.

Примеры. а) $i^2=-1$; б) $i^3=i^2\cdot i=-i$; в) $i^4=(i^2)^2=1$; г) $i^{25}=(i^4)^6\cdot i=i$; д) $(1+i)^3=1+3i+3i^2+i^3=1+3i-3-i=-2+2i$.

Если при выполнении этих действий заменить все числа им сопряженными, то и результат тоже заменится сопряженным.

Пример. а) $(1+i)(2-i)+i=3+2i$;
б) $(1-i)(2+i)-i=3-2i$.

Замечание. Действия с нулем (гл. II, п. 16) и основные законы действий (гл. II, п. 15) справедливы также и для комплексных чисел.

64. Тригонометрическая форма комплексного числа.

Общая форма записи комплексного числа, т. е. форма $a + bi$, называется *алгебраической*. Преобразуем ее:

$$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Так как

$$\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leqslant 1, \quad \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leqslant 1,$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1,$$

то можно положить:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a}{\rho}=\cos\varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b}{\rho}=\sin\varphi,$$

где $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$. Тогда получим:

$$a+bi=\rho(\cos\varphi+\sin\varphi).$$

Последнее выражение называется *тригонометрической формой* комплексного числа, число $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ называется *модулем*, а угол φ — *аргументом* комплексного числа $a+bi$.

Модуль $\rho\geqslant 0$, аргумент φ может принимать бесконечное множество значений, так как $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ не меняют своей величины, если φ увеличить на $2\pi k$, где k — целое число. Обычно для φ берут наименьшее по абсолютной величине значение, т. е. такое, что $-\pi<\varphi\leqslant\pi$.

Такое значение аргумента называется *главным*.

Любое число $z\neq 0$ может быть представлено в тригонометрической форме.

Пример. Представить в тригонометрической форме следующие числа: а) $p>0$; б) $p<0$; в) pi, $p>0$; г) pi, $p<0$; д) $2-2i$; е) $2+2i$.

Решение.

а) $p=p+0\cdot i$, $\rho=\sqrt{p^2+0^2}=p$, $\cos\varphi=\frac{p}{p}=1$,

$$\sin\varphi=\frac{0}{p}=0, \quad \varphi=0, \quad p=p(\cos 0+i\sin 0);$$

б) $p = p + 0 \cdot i$, $\rho = \sqrt{p^2 + 0^2} = -p$, $\cos\varphi = \frac{p}{-p} = -1$,

$$\sin\varphi = \frac{0}{-p} = 0,\ \varphi = \pi,\ p = -p(\cos\pi + i\sin\pi);$$

в) $pi = 0 + pi$, $\rho = \sqrt{p^2} = p$, $\cos\varphi = \frac{0}{p} = 0$, $\sin\varphi = \frac{p}{p} = 1$,

$$\varphi = \frac{\pi}{2},\ pi = p\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right);$$

г) $pi = 0 + pi$, $\rho = \sqrt{p^2} = -p$, $\cos\varphi = \frac{0}{-p} = 0$,

$$\sin\varphi = \frac{p}{-p} = -1,\ \varphi = -\frac{\pi}{2},$$

$$pi = -p\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right];$$

д) $\rho = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, $\cos\varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi =$

$$= \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \varphi = -\frac{\pi}{4},$$

$$2 - 2i = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right];$$

е) $\rho = 2\sqrt{2}$, $\cos\varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\varphi = \frac{\pi}{4},\quad 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Главные значения аргументов сопряженных чисел равны по абсолютной величине и различны по знаку, исключая случай вещественных чисел, когда значения аргументов равны.

65. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

1. Перемножив комплексные числа

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ и } z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

получим:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Отсюда модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей, а аргумент равен сумме

аргументов сомножителей. Это правило верно и для любого числа сомножителей.

Пример.

$$2(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)^2 = 2[\cos(15^\circ + 15^\circ) + i\sin(15^\circ + 15^\circ)] = 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i.$$

2. Аналогично предыдущему легко получить:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

Отсюда модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент — разности их аргументов.

3. Умножая число $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ само на себя n раз, получим:

$$[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Отсюда модуль целой степени комплексного числа равен степени модуля с тем же показателем, а аргумент — произведению показателя степени на аргумент числа.

Это верно как для натурального, так и для целого отрицательного показателя степени. Если в последней формуле сократить обе части равенства на ρ^n, то получится *формула Муавра*:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Она верна и для n целого отрицательного.

Пример. Найти с помощью формулы Муавра синус и косинус двойного угла.

Решение. $(\cos x + i\sin x)^2 = \cos 2x + i\sin 2x$, $\cos^2 x + 2i\cos x\sin x - \sin^2 x = \cos 2x + i\sin 2x$. Приравнивая вещественные части обеих частей равенства, а затем—мнимые, найдем: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

4. *Извлечение корня* из комплексного числа есть действие, обратное возведению в степень, посредством которого по данной степени (*подкоренное число*) и данному показателю степени (*показатель корня*) отыскивается основание (*корень*).

Корень n-ой степени извлекается с помощью формулы:

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right).$$

Здесь $\sqrt[n]{\rho}$ — арифметический, а $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Однако корень степени n имеет n и только n различных значений, и, чтобы получить их, достаточно положить $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Исключение представляет $z = 0$. В этом случае все значения корня равны между собой и равны нулю.

Пример.

$$\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{4k+1}{6}\pi + i\sin\frac{4k+1}{6}\pi\right).$$

Полагаем: $k = 0, 1, 2$. Получаем:

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i;$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) = -\sqrt{3} + i;$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right) = -2i.$$

66. Геометрический смысл действий над комплексными числами. 1. Комплексное число $z = a + bi$ условились геометрически изображать точкой M, у которой в данной прямоугольной системе координат (гл. III, п. 122) абсцисса равна a, а ордината b (рис. 2). По этой причине ось абсцисс называется *вещественной осью*, а ось ординат — *мнимой осью*. Комплексное число также изображают *направленным отрезком* OM, т. е. отрезком прямой, у которого указано, какая из ограничивающих его точек является *началом* и какая *концом*. В данном случае O есть начало, а M — конец. Такой направленный отрезок называется

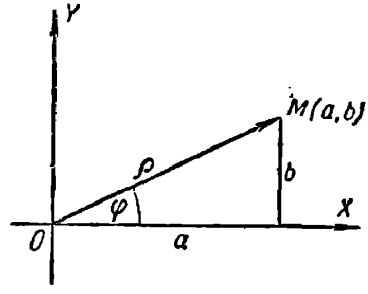

Рис. 2.

вектором. Вектор, имеющий началом точку O, а концом точку M, обозначается так: $\overline{OM}$. Направление вектора указывает стрелка на его конце. Таким образом, комплексное число $z = a + bi$ изображают вектором, начало которого совпадает с началом координат, а конец — с точкой M (a, b).

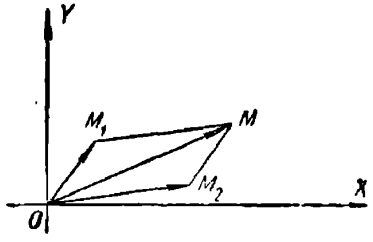

Рис. 3.

Длина вектора, т. е. длина отрезка OM, дает геометрическое изображение модуля числа, а угол, образованный осью абсцисс и вектором, т. е. $\angle XOM$, дает изображение аргумента. Очевидно, вещественным числам соответствуют точки, лежащие на вещественной оси, а чисто мнимым числам — на мнимой оси.

2. Пусть складываются числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ и числу z_1 геометрически соответствует вектор $\overline{OM}_1$, а числу z_2 — вектор $\overline{OM}_2$, (рис. 3). Из конца M_1 вектора $\overline{OM}_1$, проведем вектор $\overline{M_1M}$, *равный* вектору $\overline{OM}_2$, т. е.

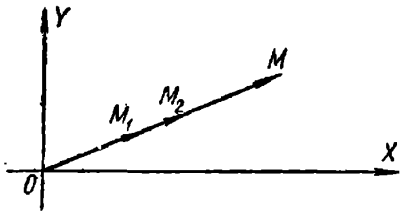

Рис. 4.

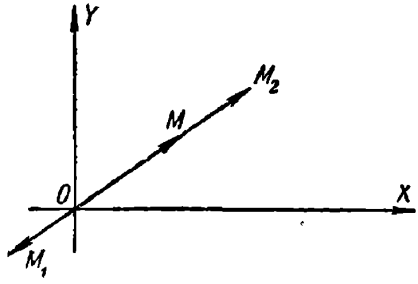

Рис. 5.

такой, который имеет с вектором $\overline{OM}_2$ одинаковую длину и направление. Тогда вектор $\overline{OM}$ даст геометрическое изображение суммы $z_1 + z_2$. Если векторы $\overline{OM}_1$ и $\overline{OM}_2$ лежат на одной прямой, то и вектор $\overline{OM}$ лежит на той же прямой (рис. 4 и 5). Построенный таким способом вектор $\overline{OM}$ называется *суммой векторов* $\overline{OM}_1$ и $\overline{OM}_2$. Поэтому можно сказать, что вектор, соответствующий сумме комплексных чисел, является суммой векторов, изображающих слагаемые.

3. Пусть число z_1 изображается вектором $\overline{OM}_1$, а число z_2 — вектором $\overline{OM}_2$. Чтобы изобразить геометрически раз-

ность $z_2 - z_1$, достаточно построить вектор $\overline{OM}$, равный вектору $\overline{M_1M_2}$ (рис. 6).

Построенный вектор $\overline{OM}$ называется *разностью векторов* $\overline{OM_2}$ и $\overline{OM_1}$. Поэтому можно сказать, что вектор, соответствующий разности комплексных чисел, является

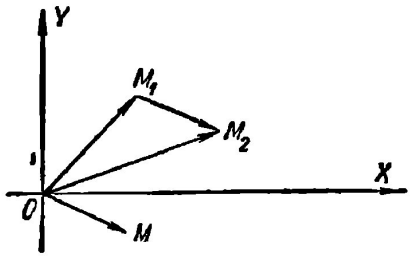

Рис. 6.

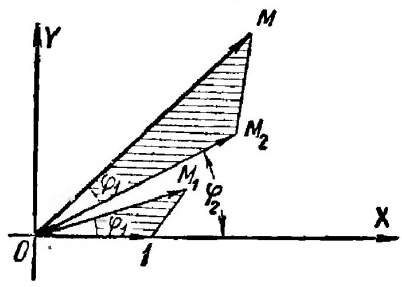

Рис. 7.

разностью векторов, изображающих уменьшаемое и вычитаемое.

4. Из рисунков 3 — 6, пользуясь теоремой, что сторона треугольника меньше суммы и больше разности двух других, легко установить соотношения:

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|.$$

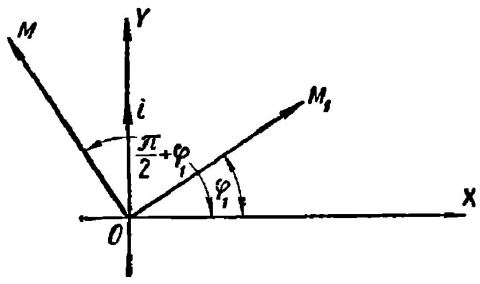

Рис. 8.

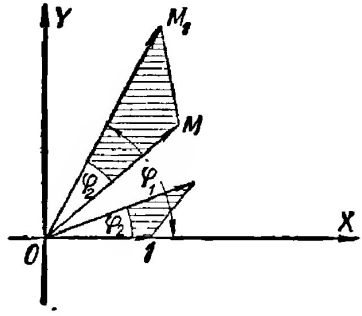

Рис. 9.

Здесь знак $|z|$ обозначает модуль числа z.

5. Чтобы построить вектор $\overline{OM}$, соответствующий произведению z_1z_2, где $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, достаточно вектор $\overline{OM_1}$, соответствующий числу z_1, повернуть на угол φ_2 и подвергнуть его преобразованию растяжения (или сжатия, если $\rho_2 < 1$) в ρ_2 раз (рис. 7).

Если $\rho_2 = 1$, то вектор $\overline{OM_1}$ нужно будет только повернуть на угол φ_2. В частности, от умножения на число $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ вектор $\overline{OM_1}$ поворачивается на угол $\frac{\pi}{2}$ (рис. 8).

6. Так как деление $\frac{z_1}{z_2} = z$ можно представить как умножение $z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$, то способ построения вектора $\overline{OM}$, соответствующего числу z, будет следующий: вектор $\overline{OM_1}$, соответствующий числу z_1, достаточно повернуть на угол $-\varphi_2$ и подвергнуть операции сжатия (или растяжения, если $\rho_2 < 1$) в ρ_2 раз (рис. 9).

Здесь ρ_2 и φ_2 — модуль и аргумент z_2. Если $\rho_2 = 1$, то вектор $\overline{OM_1}$ только повернется на угол $-\varphi_2$. В частности, при делении на i он повернется на угол $-\frac{\pi}{2}$.

§ 12. Общие сведения об уравнениях

67. Допустимые значения букв. *Численным значением* математического выражения при данных значениях букв называется число, которое получится, если в это выражение подставить вместо букв их данные значения и произвести над ними указанные знаками действия. Те значения (числа), которые могут принимать буквы в данном математическом выражении, называются *допустимыми значениями букв* для этого выражения. Совокупность или множество всех допустимых значений букв некоторого выражения определяется условиями задачи, из которой оно получено, или характером действий, производимых над буквами, или тем и другим.

Примеры. а) В формуле нечетного положительного числа $2n - 1$ допустимыми являются все натуральные числа; б) допустимыми значениями для дробного алгебраического выражения являются все числа, кроме тех, которые обращают знаменатель в 0; в) для $\sqrt{x}$ (арифметический корень) допустимыми являются нуль и положительные значения x.

68. Тождество и уравнение. 1. Два математических выражения, соединенные знаком равенства (=), образуют *равенство*. Эти выражения (оба или одно) могут быть буквенными или числовыми. Допустимыми значениями букв,

входящих в равенство, являются те значения букв, которые будут допустимыми для обоих выражений одновременно.

Пример. Допустимыми значениями для равенства $|x| = x$ являются все комплексные числа.

2. Равенство, справедливое при всех допустимых значениях входящих в него букв, а также справедливое числовое равенство называется *тождеством*. Выражения, находящиеся в левой и правой частях тождества, называются *тождественными*, а замена некоторого выражения другим ему тождественным — *тождественным преобразованием* данного выражения.

Пример. Равенства $7 - 2 = 4 + 1$, $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ и $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ являются тождествами.

Два выражения могут быть тождественными в одних условиях и не быть таковыми в других. Например, $\sqrt{x^2} = x$ будет тождеством, если условия задачи позволяют букве принимать только неотрицательные значения, которые и будут допустимыми значениями. Если же нет таких дополнительных условий, то это равенство *не будет тождеством*[1], так как с точки зрения математических действий обе его части имеют смысл для всех вещественных значений x, которые и являются допустимыми для x, а равенство имеет место лишь при x, равном положительному числу или нулю ($\sqrt{x^2}$ в действиях с радикалами предполагается арифметическим).

3. Равенство, содержащее неизвестные числа, обозначенные буквами, называется *уравнением*.

Примеры. а) Равенство $x^2 = x$ — уравнение, оно справедливо лишь при $x = 0$ и $x = 1$; б) равенство $2x = 3y$ — уравнение, оно справедливо при $x = 3t$ и $y = 2t$, где t — любое число; в) равенство $\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 3$ — уравнение, оно справедливо только при $x = 1$.

В зависимости от числа букв (неизвестных), входящих в уравнения, они разделяются на уравнения с *одним неизвестным*, *с двумя неизвестными* и т. д. Система значений неизвестных, удовлетворяющих уравнению, т. е. обращающих уравнение в тождество, называется *решением уравнения*. В случае уравнения с одним неизвестным решение называют также *корнем*. *Решить уравнение* — значит найти множество всех решений этого уравнения. Оно может быть *конечным* или *бесконечным*.

[1] Следовательно, будет *уравнением*.

Уравнение называется *алгебраическим*, если обе части его являются многочленами. Общий вид алгебраического уравнения с одним неизвестным может быть записан так:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

где n — натуральное число, называемое *степенью уравнения*.

Если алгебраическое уравнение имеет несколько неизвестных, то, перенося все члены его в одну часть и приведя подобные, получим в этой части многочлен, степень которого даст степень уравнения.

Если обе части уравнения являются алгебраическими выражениями, но хотя бы в одном слагаемом есть операция деления на выражение, содержащее неизвестное, или операция извлечения корня из выражения, содержащего неизвестное, то в первом случае уравнение называется *дробным*[1], а во втором — *иррациональным*. Решение таких уравнений приводится к решению алгебраических уравнений.

Если среди членов уравнения есть такие, которые содержат неизвестное в иррациональной степени, или в показателе, или под знаком логарифма, или под знаком тригонометрической (прямой или обратной) функции, то уравнение принадлежит к числу так называемых *трансцендентных уравнений*.

Примеры. а) Уравнения алгебраические: $x^2y^3 - xy^2 - 2 = 0$; $x^2 - 7x + 12 = 0$; б) уравнение дробное: $\frac{2x-1}{x+1} = 3 - x$; в) уравнения иррациональные: $\sqrt{x+2} = \sqrt{2x}$; $\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 4$; г) уравнения трансцендентные: $2^x = x + 2$; $\log_a (x + y) = 1$; $\sin x = \cos x$; $x^{\sqrt{2}} = y - 1$.

4. Уравнение, содержащее одну или несколько букв и не справедливое ни при каких значениях этих букв, называется *противоречивым уравнением* или *уравнением, не имеющим решения*.

Пример. Следующие уравнения противоречивы:

$$xy = 2 + xy; \quad \sqrt{x} + \sqrt{x+1} + 2 = 0.$$

Противоречивость последнего вытекает из того факта, что в элементарной математике при рассмотрении иррациональных уравнений корни считают арифметическими.

---

[1] При этом все операции, производимые над неизвестными, рациональные.

5. Тождество, содержащее одно или несколько неизвестных, является также уравнением, т. е. в этом случае *тождество есть частный случай уравнения.*

69. Эквивалентные (равносильные) уравнения.

1. Если любое решение одного уравнения является решением другого и, обратно, любое решение второго уравнения является решением первого, то такие уравнения называются *эквивалентными* или *равносильными.*

Примеры. а) Уравнения равносильные: $x + y = 1$ и $2x + 2y = 2$; б) уравнения неравносильные:

$$\sqrt{(x-6)(x-1)} = \sqrt{14} \text{ и } \sqrt{x-6}\sqrt{x-1} = \sqrt{14},$$

так как первое уравнение имеет корни 8 и -1, а второе — только один корень, равный 8 (имеются в виду арифметические корни).

Замечание. Уравнения могут быть равносильными в одних условиях и не быть таковыми в других. Например, уравнения $x^3 = 1$ и $x = 1$ будут равносильными в *области вещественных чисел*, т. е. если x может принимать только вещественные значения. В области комплексных чисел они не будут равносильными, так как в этом случае первое уравнение имеет корни: $1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, а второе — только корень 1.

2. Если к обеим частям уравнения прибавить один и тот же многочлен (в частности, число), то полученное новое уравнение будет равносильно данному. Так, уравнение $x^2 = x$ и уравнение $x^2 + 2x = 3x$ равносильны. Оба они имеют корнями только числа 0 и 1. Но если к обеим частям первого уравнения прибавить $\frac{1}{x}$, то уравнения $x^2 = x$ и $x^2 + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x}$ не будут равносильными, так как первое имеет корнями числа 1 и 0, а второе только корень 1. Число 0 не может быть корнем второго уравнения, потому что при $x = 0$ обе части уравнения не имеют смысла. В этом случае говорят, что в уравнении $x^2 = x$ произошла *потеря корня.*

3. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, то полученное новое уравнение будет равносильно данному. Так, урав-

нения $x^2 = x$ и $2x^2 = 2x$ равносильны. Оба они имеют корнями только числа 1 и 0.

Но если обе части первого уравнения умножить на $x^2 - 5x + 6$, то уравнения $x^2 = x$ и $(x^2 - 5x + 6)x^2 = (x^2 - 5x + 6)x$ не будут равносильными, так как первое имеет корнями только числа 1 и 0, а второе — числа 3, 2, 1,0. В этом случае говорят, что уравнение приобрело *посторонние корни*.

4. Два или более уравнений называются *совместными*, если они имеют хотя бы одно общее решение.

Примеры. а) Уравнения $x - 1 = 0$ и $x^2 - 3x + 2 = 0$ совместны, так как имеют общий корень, равный 1; б) уравнения $x + y = 3$ и $2x + 2y = 1$ не совместны, так как первое уравнение противоречит второму $\left(x + y = \frac{1}{2}\right)$;

70. Системы уравнений. 1. *Системой уравнений* называются два или более уравнений, в каждом из которых неизвестные, обозначенные одинаковыми буквами, должны иметь одну и ту же величину.

Примеры. а) Системы двух уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

б) Системы трех уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 + 5x + 6 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

2. *Решением* системы называется совокупность тех значений неизвестных, которые, будучи подставлены в уравнения системы вместо неизвестных, обратят каждое уравнение в тождество.

Решить систему — значит найти множество всех решений этой системы. Оно может быть *конечным* или *бесконечным*. Система, не имеющая решений, называется *противоречивой*.

3. Если всякое решение одной системы является решением другой и, обратно, всякое решение второй является решением первой, то такие системы называются *эквивалентными* или *равносильными*. Например, системы

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 5x+2y=12 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 3x-y=5 \\ y=1 \end{cases}$$

являются эквивалентными, так как обе имеют только одно решение: $x=2$, $y=1$.

4. Если два уравнения системы или несколько, или все уравнения системы сложить почленно, предварительно умножив каждое из них на какое-нибудь число, то полученное в результате этого уравнение называется *выводным* из данной системы. Повторяя это действие, можно получить снова систему, которая также называется *выводной* из данной.

Все решения данной системы являются решениями выводной системы, выводная может иметь решения, не являющиеся решениями данной.

Примеры. а) Дана система: $x+2y=3$, $x-y=0$. Умножая сперва первое уравнение на 2 и складывая результат со вторым, а затем умножая второе на 2 и складывая результат с первым, получим выводную систему:

$$\begin{cases} 3x+3y=6 \\ 3x=3, \end{cases}$$

которая равносильна данной.

б) Дана система: $x+y=3$, $x-y=1$. Умножая первое уравнение на 2 и складывая результат со вторым, а затем умножая первое уравнение на 4, второе на 2 и складывая результаты, получим выводную систему:

$$\begin{cases} 3x+y=7 \\ 6x+2y=14, \end{cases}$$

которая имеет бесконечное множество решений, в том числе решение $x=2$, $y=1$. Последнее есть единственное решение данной системы. Эти системы не равносильны.

§ 13. Линейные уравнения и системы линейных уравнений

71. Линейное уравнение. 1. *Линейным уравнением*, или *уравнением 1-й степени*, называется алгебраическое уравнение 1-й степени относительно неизвестного.

Примеры. а) Уравнения $x+5=8$, $x+y=1$, $x-2y-z=4$ линейные; б) уравнение $2xy=1$ нелинейное.

Линейное уравнение называется *линейным однородным*, если оно не имеет свободного члена (т. е. члена, не содержащего неизвестных).

Пример. $2x - y + 3z = 0$ — однородное уравнение.

2. Чтобы решить одно уравнение с одним неизвестным, его приводят к виду $ax + b = 0$. Для этого достаточно: а) освободить уравнение от дробей; б) раскрыть скобки; в) перенести все члены, содержащие неизвестное, в одну сторону уравнения, а известные члены — в другую и сделать приведение подобных. Полученное уравнение $ax + b = 0$ будет равносильно данному. Если в нем $a \neq 0$, то уравнение будет иметь единственное решение: $x = -\frac{b}{a}$. Если $a=0$, но $b \neq 0$, то уравнение не имеет решения. Наконец, если $a = 0$ и $b = 0$, то любое число является решением этого уравнения, т. е. уравнение имеет бесконечное множество решений.

Пример. $\frac{x+1}{2} + \frac{x-2}{4} = \frac{2x+3}{3} - \frac{1}{2}$.

Решение. $6(x + 1) + (x - 2) \cdot 3 = 4(2x + 3) - 6$, $6x + 6 + 3x - 6 = 8x + 12 - 6$, $9x - 8x = 6$, $x = 6$.

3. Для совместности уравнений $ax + b = 0$ и $a_1x + b_1 = 0$ необходимо, чтобы было $ab_1 - a_1b = 0$.

Однако это условие не является достаточным. Так например, если $a = b_1 = a_1 = 0$, но $b \neq 0$, то $ab_1 - a_1b = 0$. В то же время первое уравнение не имеет решений, а второе имеет их бесконечное множество.

4. Одно уравнение с двумя, тремя и т. д. неизвестными приводится соответственно к виду: $ax + by = c$; $ax + by + cz = d$ и т. д.

Если коэффициенты при всех неизвестных в таком приведенном уравнении равны нулю, а свободный член не равен нулю, то уравнение не имеет решения. Во всех остальных случаях оно имеет бесконечное множество решений.

72. Система линейных уравнений. 1. Система двух уравнений с двумя неизвестными всегда может быть приведена к виду:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (*)$$

Умножим первое уравнение на b_2, а второе на $-b_1$ и сложим после этого почленно второе и первое. Затем ум-

ножим первое уравнение на $-a_2$, а второе — на a_1 и сложим после этого почленно полученные уравнения. Выводная система будет иметь вид:

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x = c_1 b_2 - c_2 b_1,$$
$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, y = a_1 c_2 - a_2 c_1.$$

Если $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, то получим решение выводной системы в виде:

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \qquad (**)$$

Но решение выводной системы может и не быть решением данной (см. п. 70, 4), поэтому еще нужно доказать, что полученные значения x и y удовлетворяют данной системе уравнений. На самом деле они являются решением данной системы, и, чтобы это доказать, достаточно подставить в уравнения системы значения x и y из (**) и убедиться, что получатся тождества.

Вообще же, если: а) $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, то система имеет единственное решение, выражаемое равенствами (**);

б) $a_1 b_2 - a_2 b_1 = c_1 b_2 - c_2 b_1 = a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0$, то система имеет бесконечное множество решений; обычно эти условия можно привести к виду: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$;

в) $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, но $c_1 b_2 - c_2 b_1 \neq 0$ (или $a_1 c_2 - a_2 c_1 \neq 0$), то система не имеет решения; обычно эти условия можно привести к виду: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

Формулы (**) и результаты исследования системы легко запоминаются, если пользоваться *определителями* (см. п. 133 — 135, гл. III).

2. Для решения системы двух уравнений, приведенной к виду (*), обычно пользуются *способом сложения и вычитания* или *способом подстановки*, хотя есть и другие способы.

Способ сложения и вычитания только что был применен в п. 72, 1. Обычно при этом держатся следующего правила: а) умножают обе части каждого уравнения системы на такие числа, чтобы коэффициенты при одном и том же неизвестном стали равны по абсолютной величине; б) складывают или вычитают полученные уравнения с таким расчетом, чтобы выводное уравнение содержало только одно неизвестное; в) решив это уравнение с одним неизвестным, под-

ставляют его значение в одно из уравнений данной системы и, получив снова уравнение с одним неизвестным, находят из него значение второго неизвестного.

Пример. Решить систему:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

Умножим почленно первое уравнение системы на 3, а второе на 2. Получим:

$$\begin{cases} 9x - 6y = 12 \\ 4x + 6y = 14 \end{cases}$$

Сложим полученные уравнения почленно:

$$13x = 26.$$

Отсюда $x = 2$.

Подставим в первое уравнение данной системы значение $x = 2$. Получим: $6 - 2y = 4$, $2y = 2$, $y = 1$.

Итак, решение системы: $x = 2$, $y = 1$.

Правило решения способом подстановки состоит в следующем: а) из какого-нибудь уравнения данной системы находят одно неизвестное, выраженное через другое; б) найденное выражение подставляют во второе уравнение системы и решают полученное уравнение с одним неизвестным; в) подставляют полученное значение неизвестного в ранее найденное выражение для другого неизвестного и находят из него значение второго неизвестного.

Пример. Решить систему:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$$

Находим из первого уравнения выражение x через y:

$$x = \frac{12 - 3y}{2}. \qquad (***)$$

Подставим это выражение во второе уравнение:

$$3 \cdot \frac{12 - 3y}{2} - 4y = 1.$$

Отсюда $3(12 - 3y) - 8y = 2$, $36 - 9y - 8y = 2$, $-17y = -34$, $y = 2$.

Подставим значение $y = 2$ в формулу (***). Получим: $x = \frac{12 - 3 \cdot 2}{2} = 3$.

Итак, решение системы: $x = 3$, $y = 2$.

Замечание. Так как в обоих примерах выполнено условие $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то делать проверку найденных значений x, y не требуется. Однако если предварительно не было бы известно, что система имеет единственное решение, то такую проверку пришлось бы *обязательно* делать.

3. Система трех уравнений с тремя неизвестными, если она имеет единственное решение, может быть решена так же, как и система двух уравнений с двумя неизвестными, т. е. способом сложения и вычитания или способом подстановки. Это же верно и по отношению к любой линейной системе уравнений, у которой число уравнений равно числу неизвестных. Однородная система всегда имеет решение $x = y = \ldots = 0$.

4. Если число уравнений системы меньше числа неизвестных, то такая система или не имеет решений, или имеет их бесконечное множество.

5. Все сказанное относительно линейных уравнений и систем линейных уравнений верно и в том случае, когда все или некоторые коэффициенты не вещественные, а комплексные.

§ 14. Уравнения и системы уравнений 2-й степени

73. Квадратное уравнение. 1. *Квадратным уравнением*, или *уравнением* 2-й *степени с одним неизвестным*, называется алгебраическое уравнение второй степени, которое имеет вид $ax^2 + bx + c = 0$ или может быть приведено к такому виду после раскрытия в нем скобок, перенесения всех членов в одну часть и приведения подобных членов. В элементарной математике принято считать a, b и c вещественными числами, причем $a \neq 0$. Если $b = 0$, или $c = 0$, или $b = c = 0$, то уравнение называется *неполным*, если $a = 1$, то оно называется *приведенным*.

2. Квадратное уравнение имеет два корня. Характер корней можно определить по выражению $b^2 - 4ac$, называемому *дискриминантом квадратного уравнения*. Если $b^2 - 4ac > 0$, то корни вещественные и различные. Если $b^2 - 4ac = 0$, то корни вещественные и равные. Если $b^2 - 4ac < 0$, то корни комплексные (но не вещественные).

3. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ можно найти по формуле: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Если уравнение имеет вид $ax^2+2bx+c=0$ или $x^2+px+q=0$, то для них соответственно можно пользоваться при решении такими формулами:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a} \text{ и } x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Пример. Решить уравнение: $2x^2-x-1=0$.

Решение. $x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm3}{4}$; $x_1=1$, $x_2=-\frac{1}{2}$.

4. Если квадратное уравнение неполное, то его можно решить и иначе:

а) $ax^2+bx=0$, $x(ax+b)=0$, $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$;

б) $ax^2+c=0$, $x^2=-\frac{c}{a}$, $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

5. *Теорема Виета.* Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна коэффициенту при неизвестном в 1-й степени, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Пример. Составить квадратное уравнение, зная его корни: $x_1=3$, $x_2=-1$.

Решение. $x^2-(3-1)x+3\cdot(-1)=0$, $x^2-2x-3=0$.

6. Выражение ax^2+bx+c называется *квадратным трехчленом* или *трехчленом 2-й степени*. Квадратный трехчлен можно разложить на множители по формуле:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$. Однако это разложение будет выражено через комплексные величины, если $b^2-4ac<0$.

Пример. Разложить на множители трехчлен x^2-3x+2.

Решение. Решаем квадратное уравнение: $x^2-3x+2=0$.

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2},\ x_1=2,\ x_2=1.$$

Отсюда $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$.

Если дискриминант квадратного трехчлена отрицателен, то трехчлен при всех вещественных значениях x имеет тот же знак, что и коэффициент при старшем члене.

То же самое можно сказать про знак трехчлена при всех x, за исключением $x = -\frac{b}{2a}$, в случае дискриминанта, равного нулю. При $x = -\frac{b}{2a}$ трехчлен равен нулю.

Если же дискриминант трехчлена положителен, то трехчлен имеет два вещественных корня. При всех x, больших меньшего корня и одновременно меньших большего, знак трехчлена противоположен знаку коэффициента при старшем члене, и, наконец, при всех прочих вещественных значениях x, за исключением корней, знак трехчлена совпадает со знаком коэффициента его старшего члена.

74. Системы уравнений 2-й степени с двумя неизвестными. 1. Общий вид системы двух алгебраических уравнений 2-й степени с двумя неизвестными всегда можно записать так:

$$\begin{cases} a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2 + d_1 x + e_1 y + f_1 = 0 \\ a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2 + d_2 x + e_2 y + f_2 = 0 \end{cases}$$

Но в элементарной алгебре изучаются только частные случаи таких систем. Ниже они рассмотрены. Коэффициенты предполагаются вещественными.

2. Дана система:

$$\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ Mx + Ny + P = 0 \end{cases}$$

Ее можно решить способом подстановки. Для этого достаточно из второго уравнения выразить одно из неизвестных через другое и найденное выражение подставить в первое. В результате получится квадратное уравнение, решив которое найдем значения одного из неизвестных. Затем, подставив эти значения неизвестного в выражение, найденное для другого неизвестного, получим соответствующие значения второго.

Пример. Решить систему:

$$\begin{cases} 2x^2 + 15xy + 4y^2 + 43x + 24y + 7 = 0 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

Находим из второго уравнения: $x = 2y - 5$. Подставляем в первое:

$$2(2y-5)^2 + 15(2y-5)y + 4y^2 + 43(2y-5) + 24y + 7 = 0.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим: $42y^2 - -5y - 158 = 0$.

Отсюда $y_1 = 2$; $y_2 = -\frac{79}{42}$.

Из равенства $x = 2y - 5$ найдем:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{184}{21}.$$

3. Система $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$

может быть решена так, как и предыдущая, но ее можно решить и с помощью квадратного уравнения: $z^2 - az + b = 0$.

Найдя корни z_1 и z_2 этого уравнения, получим два решения данной системы: $x_1 = z_1$, $y_1 = z_2$; $x_2 = z_2$, $y_2 = z_1$.

Аналогично решается система:

$$\begin{cases} x - y = a \\ xy = b \end{cases}$$

4. Система $\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ xy = b \end{cases}$

также может быть решена способом подстановки или сведением к квадратному уравнению, если возвести второе уравнение в квадрат и воспользоваться теоремой Виета. При этом нужно помнить, что возведение в квадрат может привести к посторонним корням. Эту систему можно решить и так: умножить второе уравнение почленно на 2 и затем один раз почленно прибавить к первому уравнению, а другой — вычесть. Тогда получится система, равносильная данной:

$$\begin{cases} (x + y)^2 = a + 2b \\ (x - y)^2 = a - 2b \end{cases}$$

Из нее легко получить:

$$x + y = \pm\sqrt{a + 2b},$$
$$x - y = \pm\sqrt{a - 2b}.$$

Остается решить четыре системы линейных уравнений.

5. Способом подстановки можно также решить систему:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ xy = b \end{cases}$$

Ее можно решить и сведением к квадратному уравнению, если переписать систему так:

$$\begin{cases} x^2 + (-y^2) = a \\ x^2 \cdot (-y^2) = -b^2, \end{cases}$$

а затем воспользоваться теоремой Виета.

§ 15. Уравнения высших степеней с одним неизвестным

75. Некоторые общие теоремы. 1. *Уравнениями высших степеней* называются алгебраические уравнения степени выше второй. Общий вид таких уравнений следующий:

$$a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \ldots + a_{n+1} = 0.$$

2. Алгебраическое уравнение n-й степени, как доказывается в высшей математике, имеет ровно n корней. Среди них могут быть и равные. Таким образом, алгебраическое уравнение степени n имеет *не более n различных корней*, а меньше иметь может.

3. Если уравнение с вещественными коэффициентами (а только такие и рассматриваются в элементарной алгебре) и если оно имеет комплексный корень $a + bi$, то оно имеет и сопряженный с ним корень $a - bi$. Если же это уравнение нечетной степени, то оно имеет вещественный корень.

4. Если коэффициент старшего члена алгебраического уравнения равен единице, а все прочие его коэффициенты — целые числа, то все рациональные корни такого уравнения будут целыми числами и делителями свободного члена.

В элементарной алгебре рассматриваются лишь некоторые частные случаи уравнений высших степеней, которые и приведены ниже.

76. Двучленные уравнения. 1. Двучленным уравнением называется алгебраическое уравнение вида $x^n \pm a = 0$, где $a \geqslant 0$ и $n > 1$. Заменой $x = \sqrt[n]{a}\, y$, где $a \neq 0$ и $\sqrt[n]{a}$ — арифметический корень, двучленное уравнение приводится к виду:

$$y^n \pm 1 = 0.$$

2. В элементарной алгебре обычно рассматривают лишь случаи $n = 2, 3, 4, 6$.

а) $x^3 - 1 = 0$; $x^2 = 1$; $x_1 = 1$; $x_2 = -1$.

б) $x^2 + 1 = 0$; $x^2 = -1$; $x_1 = i$; $x_2 = -i$.

в) $x^3 - 1 = 0$; $(x-1)(x^2+x+1) = 0$; $x_1 = 1$; $x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$.

г) $x^3 + 1 = 0$; $(x+1)(x^2-x+1) = 0$; $x_1 = -1$; $x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$.

д) $x^4 - 1 = 0$; $(x^2-1)(x^2+1) = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = i$; $x_4 = -i$.

е) $x^4 + 1 = 0$; $x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = 0$; $(x^2+1)^2 - (x\sqrt{2})^2 = 0$; $(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1)(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1) = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}\, i}{2}; \quad x_{3,4} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2}\, i}{2}.$$

ж) $x^6 - 1 = 0$; $(x^3-1)(x^3+1) = 0$; $x_{1,2} = \pm 1$;

$$x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}; \quad x_{5,6} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}.$$

з) $x^6 + 1 = 0$. Заменой $x = iz$ приводим уравнение к виду: $z^6 - 1 = 0$. Поэтому

$$x_{1,2} = \pm i, \quad x_{3,4} = \frac{-i \pm \sqrt{3}}{2}, \quad x_{5,6} = \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}.$$

3. В общем случае, если $a \neq 0$, то двучленное уравнение имеет n различных решений, выражаемых формулой:

$$x = \sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}\right),$$

или

$$x = \sqrt[n]{a}\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]$$ (см. п. 65).

При $a = 0$ все корни равны нулю.

77. Трехчленные уравнения. *Трехчленным уравнением* называется уравнение вида

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0.$$

Решение его приводится к решению квадратного уравнения $ay^2 + by + c = 0$ и решению двучленного уравнения $x^n = y$.

Пример. $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$.

Решение. $x^3 = y$, $y^2 - 7y - 8 = 0$, $y_1 = 8$, $y_2 = -1$, $x^3 = 8$, $x^3 = -1$, $x_1 = 2$, $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}\, i$, $x_4 = -1$, $x_{5,6} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$.

Частный случай трехчленного уравнения при $n = 2$, т. е. уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$ называется *биквадратным уравнением*.

78. Возвратные уравнения. 1. *Возвратным уравнением n-й степени* называется уравнение следующего вида: $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + cx^2 + bx + a = 0$, т. е. такое уравнение, в котором коэффициенты членов, равноотстоящих от начала и конца, равны. Возвратное уравнение не имеет корня, равного нулю. Если же оно имеет корень, равный x_1, то оно имеет и корень, равный $\frac{1}{x_1}$.

2. Возвратное уравнение нечетной степени имеет корень $x = -1$. Если это уравнение поделить на $x + 1$, то получится возвратное уравнение четной степени, на единицу меньшей степени исходного уравнения.

3. Возвратное уравнение четной степени можно привести с помощью подстановки $y = x + \frac{1}{x}$ к уравнению степени в два раза меньшей, чем степень исходного. Для этого делят все члены данного уравнения на x^m (если степень данного была $2m$) и группируют члены, равноотстоящие от конца и начала. После этого делают замену по формулам:

$$x + \frac{1}{x} = y,\ x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2,\ x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y \text{ и т. д.}$$

Пример. Решить уравнение: $2x^5 + 5x^4 + 13x^3 + 13x^2 + 5x + 2 = 0$.

Решение. Уравнение имеет корень $x = -1$. Делим левую часть уравнения на $x + 1$ и получаем возвратное уравнение:

$$2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Делим каждый член последнего на x^2 и группируем:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0.$$

Заменяем: $x + \frac{1}{x} = y$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.

Получаем уравнение: $2(y^2-2)+3y-16=0$, решив которое найдем $y_1=-4$, $y_2=\frac{5}{2}$.

Таким образом, для определения остальных корней получим уравнения: $x+\frac{1}{x}=-4$ и $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$. Оба они приводятся к квадратным уравнениям, и, решив последние, найдем: $x_2=2$, $x_3=\frac{1}{2}$, $x_{4,5}=-2\pm\sqrt{3}$.

§ 16. Дробные и иррациональные уравнения

79. Дробные уравнения. Уравнение называется *дробным*, если обе части его являются рациональными алгебраическими выражениями, причем, по крайней мере, одна из них дробная относительно неизвестных.

Если дробное уравнение с одним неизвестным, то, чтобы решить такое уравнение, его приводят к виду: $\frac{A}{B}=0$, где $\frac{A}{B}$ — несократимая дробь. Тогда последнее будет эквивалентно алгебраическому уравнению $A=0$ в области допустимых значений для неизвестного.

Пример. Решить уравнение: $\frac{2x}{x+4}+\frac{27}{2x^2+7x-4}=\frac{7-2x}{2x-1}$.

Решение.

$$\frac{2x}{x+4}+\frac{27}{2x^2+7x-4}-\frac{7-2x}{2x-1}=0,\quad \frac{6x^2-x-1}{(2x-1)(x+4)}=0.$$

$$\frac{(2x-1)(3x+1)}{(2x-1)(x+4)}=0,\quad \frac{3x+1}{x+4}=0,\quad 3x+1=0,\quad x=-\frac{1}{3}.$$

80. Иррациональные уравнения. 1. Уравнение называется *иррациональным*, если обе части его являются алгебраическими выражениями, причем одна из них или обе иррациональны относительно неизвестных. В элементарной алгебре рассматриваются лишь такие иррациональные уравнения, в которых имеющиеся корни (радикалы) четной степени предполагают арифметическими, а нечетной степени — вещественными (положительными или отрицательными в зависимости от знака подкоренного выражения).

2. Иррациональные уравнения решают обычно *способом исключения радикалов*. Для этого обе части уравнения возводят в некоторую степень с таким расчетом, чтобы после этого уравнение перестало быть иррациональным. Иногда такую операцию нужно повторить.

Получающееся в результате этого уравнение (алгебраическое или дробное), вообще говоря, не будет эквивалентно данному.

Поэтому, найдя решения полученного алгебраического или дробного уравнения, нужно произвести проверку решений путем подстановки в данное уравнение и отбросить те из них, как *посторонние*, которые не будут ему удовлетворять. Однако если обе части иррационального уравнения возводились в нечетную степень, то проверку производить не нужно, так как в этом случае придем к уравнению, эквивалентному данному.

Следующие уравнения, вообще говоря, не эквивалентны:

а) $\sqrt{A}=\sqrt{B}$ и $A=B$

б) $\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}=C$ и $\sqrt{AB}=C$;

в) $\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}=C$ и $\sqrt{\dfrac{A}{B}}=C$.

Пример. $\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{5x+15}$.

Решение. $(\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+2})^2=(\sqrt{5x+15})^2$;

$4x+1+2\sqrt{4x^2+9x+2}+x+2=5x+15$;

$2\sqrt{4x^2+9x+2}=12$; $(\sqrt{4x^2+9x+2})^2=36$;

$4x^2+9x+2=36$; $4x^2+9x-34=0$; $x_1=2$; $x_2=-\frac{17}{4}$.

Корень $x_2=-\frac{17}{4}$ посторонний.

§ 17. Общие сведения о неравенствах

81. Основные свойства неравенств. 1. Два числовых выражения или два буквенных математических выражения, соединенные знаком $>$ или $<$ (а также $\geqslant$ или $\leqslant$), составляют *неравенство*.

Допустимыми значениями букв, входящих в неравенство, являются все те значения букв, которые будут допустимыми для обоих выражений одновременно.

Неравенство, справедливое при всех допустимых значениях входящих в него букв, а также справедливое числовое неравенство называется *тождественным*.

Пример. Неравенства $4+1>3$ и $7a^2+5>7a^2$ являются тождественными.

2. К основным свойствам неравенств относятся следующие:

а) Если $a>b$, то $b<a$.

б) « $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.

в) « $a>b$, то $a+c>b+c$.

г) « $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$.

д) « $a>b$ и $c<d$, то $a-c>b-d$.

е) « $a>b$ и $m>0$, то $am>bm$.

ж) « $a>b$ и $m<0$, то $am<bm$.

з) « $a>b>0$ или $b<a<0$, то $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

и) « $a>b>0$ и $c>d>0$, то $ac>bd$.

к) « $a>b>0$ и n — натуральное число, то $a^n>b^n$.

л) « $a>b>0$, то $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ ($\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[n]{b}$ — арифметические).

82. Решение и равносильность неравенств.

1. Неравенства, содержащие одну или несколько неизвестных букв, называются соответственно *неравенствами с одним* или *несколькими неизвестными*. Они разделяются на *трансцендентные*, *алгебраические*, *дробные* и *иррациональные*, а в случае алгебраических — на *неравенства первой*, *второй* и т. д. *степени* совершенно так же, как и уравнения (см. § 12).

Решением такого неравенства называется система значений неизвестных, удовлетворяющих неравенству, т. е. обращающих его в тождественное. *Решить* неравенство — значит найти множество всех его решений.

2. Два неравенства называются *равносильными*, если любое решение одного неравенства является решением другого и, обратно, любое решение второго неравенства является решением первого.

Если к обеим частям неравенства прибавить один и тот же многочлен (в частности, число), то полученное неравенство будет равносильно данному.

Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то полученное неравенство будет равносильно данному.

Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число и одновременно заменить знак неравенства на знак противоположного смысла, то полученное неравенство будет равносильно данному.

3. Если неравенство не справедливо ни при каких значениях входящих в него букв, то про него говорят, что оно *не имеет решения*.

Пример. Неравенство $7a^2 + 5 < 7a^2$ не имеет решений.

§ 18. Неравенства и системы неравенств с одним неизвестным

83. Неравенства 1-й степени. Неравенство 1-й степени с одним неизвестным всегда может быть приведено к виду $ax + b > 0$.

Если $a > 0$, то решениями будут все числа $x > -\frac{b}{a}$.

Если $a < 0$, то решениями будут все числа $x < -\frac{b}{a}$.

Если $a = 0$ и $b > 0$, то неравенство тождественное.

Если $a = 0$ и $b \leqslant 0$, то неравенство не имеет решений.

Как практически следует поступать при решении таких неравенств, покажем на примере.

Пример. Решить неравенство: $\frac{7-2x}{3} + 18 > \frac{12-x}{4} + x$.

Решение. $4(7-2x) + 12 \cdot 18 > 3(12-x) + 12x$, $28 - 8x + 216 > 36 - 3x + 12x$, $-8x + 3x - 12x > 36 - 28 - 216$, $-17x > -208$, $17x < 208$, $x < \frac{208}{17}$.

84. Системы неравенств 1-й степени. *Системой неравенств* с одним неизвестным называются два или несколько неравенств, в которых неизвестное обозначает одну и ту же величину. Система неравенств может состоять из двух, трех и т. д. неравенств. *Решить* систему неравенств с одним неизвестным — значит найти все значения неизвестного, которые удовлетворяют каждому неравенству системы.

При решении такой системы находят решения каждого неравенства и путем сопоставления их получают решения системы, если она имеет их.

Примеры. а) Решить систему: $3x - 1 > 1 + x$, $5x - 1 < 7 + x$.

Р е ш е н и е. $3x-1>1+x$, $2x>2$, $x>1$; $5x-1<7+x$, $4x<8$, $x<2$. Отсюда $1<x<2$.

б) Решить систему: $x-2>0$, $3x-1<0$.

Р е ш е н и е. Из первого неравенства получаем $x>2$, а из второго $x<\frac{1}{3}$. Следовательно, система не имеет решений (система неравенств *противоречива*).

в) Решить систему: $2x+1>0$, $x-1>0$, $x-2\leqslant 0$.

Р е ш е н и е. $x>-\frac{1}{2}$, $x>1$, $x\leqslant 2$. Отсюда решение системы: $1<x\leqslant 2$.

85. Неравенства 2-й степени. *Неравенством 2-й степени с одним неизвестным* называется алгебраическое неравенство, которое имеет вид

$$ax^2+bx+c>0 \quad (a\neq 0)$$

или может быть приведено к такому виду после раскрытия скобок, перенесения членов в одну часть неравенства и приведения подобных членов, а если нужно, то и умножения неравенства на -1.

Если обозначить корни трехчлена ax^2+bx+c через x_1 и x_2 $(x_1<x_2)$, в том случае когда они вещественные, то все случаи, какие могут представиться при решении этого неравенства, можно свести в следующую таблицу.

b^2-4ac	a	Решения x неравенства
>0	>0	$-\infty<x<x_1$ и $x_2<x<+\infty$
>0	<0	$x_1<x<x_2$
<0	>0	x — любое
<0	<0	Решений нет
$=0$	>0	x—любое, за исключением $-\frac{b}{2a}$
$=0$	<0	Решений нет

Практически удобнее пользоваться не таблицей, а поступать так, как показано ниже на примерах.

П р и м е р ы. а) Решить неравенство: $x^2-5x+6>0$.

Р е ш е н и е. $(x-2)\cdot(x-3)>0$. Следовательно, или $x-2>0$, $x-3>0$, или $x-2<0$, $x-3<0$. Из первой системы находим: $x>2$, $x>3$. Отсюда $x>3$. Из второй системы получаем: $x<2$, $x<3$. Отсюда $x<2$. Итак, неравенство имеет следующие решения: $x>3$; $x<2$;

б) Решить неравенство: $x^2 - 4x + 5 > 0$.

Р е ш е н и е. Трехчлен $x^2 - 4x + 5$ не имеет вещественных корней. Поэтому его преобразуем так: $x^2 - 4x + 4 - 4 + 5 > 0$, $(x-2)^2 + 1 > 0$. Теперь видим, что неравенство тождественное.

З а м е ч а н и е. Если корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ вещественны, то неравенство 2-й степени можно решить и другим способом, который применяется и для решения некоторых неравенств высших степеней. Проиллюстрируем это примером на неравенство 4-й степени. Пусть требуется решить неравенство: $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x > 0$. Оно равносильно такому неравенству: $(x+2) \times (x+1)\, x\, (x-1) > 0$. Расположим корни многочлена, находящегося в левой части неравенства, в порядке возрастания $(-2, -1, 0, 1)$ и построим интервалы: $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$. При этом под интервалом (a, b), где a и b — вещественные числа, понимается множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$, а под интервалами $(-\infty, b)$ и $(a, +\infty)$ соответственно $x < b$ и $x > a$. При переходе x из одного интервала в другой, смежный с ним, многочлен меняет свой знак, так как границей смежных интервалов служит корень многочлена. Поэтому для всех x какого-либо из написанных интервалов имеет место постоянство знака численной величины многочлена и чередование знака с + на — и с — на + при последовательном переходе из интервала в интервал. Следовательно, раз в первом из них левая часть неравенства положительна, что очевидно, то она будет положительна также в третьем и пятом интервалах.

Итак, должно быть: $x < -2$, или $-1 < x < 0$, или $x > 1$.

Аналогично можно решить неравенство: $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x+1)} > 0$, если заметить, что оно эквивалентно неравенству: $(x-1)(x-2)(x-3)(x+1) > 0$.

§ 19. Некоторые полезные неравенства

86. Неравенства с абсолютными величинами.

а) Если $|a| < b$, то $-b < a < b$.

б) Если $-b < a < b$, то $|a| < b$.

в) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

г) $|a-b| \geqslant |a| - |b|$.

87. Соотношение среднего геометрического и среднего арифметического. Средним геометрическим чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Средним арифметическим чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$. Среднее геометрическое нескольких положительных чисел не превосходит среднего арифметического этих чисел, т. е. $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

Равенство имеет место только при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

88. Неравенство Буняковского.

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

Равенство имеет место только при $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

§ 20. Последовательности чисел (числовые последовательности)

89. Последовательность. 1. *Числовой последовательностью* или просто *последовательностью*, называется множество чисел, следующих одно за другим по определенному правилу.

Числа, образующие последовательность, называются ее *членами*.

Таким образом, последовательность может быть записана так: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

a_n называется *общим членом последовательности*. Если в последовательности есть последний член, то она называется *конечной*, в противном случае — *бесконечной*. Конечная последовательность может быть задана перечислением ее членов. Чтобы *задать бесконечную последовательность* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, нужно задать правило, по которому любому натуральному числу n приводится в соответствие некоторое число a_n.

Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ кратко обозначается знаком $\{a_n\}$.

В дальнейшем под словом «последовательность» мы будем понимать бесконечную последовательность вещественных чисел.

Примеры. а) Следующие множества чисел являются последовательностями:

$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$; $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \ldots$; $1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$. Их общие члены соответственно: $n, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, n^2$;

б) Десятичные приближения $\sqrt{2}$ с точностью до 1; 0,1; 0,01 и т. д. по недостатку, т. е. 1; 1,4; 1,41 и т. д., образуют числовую последовательность.

2. Если все члены числовой последовательности равны между собой, то последовательность называется постоянной.

3. Последовательность $\{a_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если каждый следующий член ее больше (меньше) предыдущего, т. е. если $a_{k+1} > a_k$ ($a_{k+1} < a_k$).

Последовательность $\{a_n\}$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если каждый последующий член ее не меньше (не больше) предыдущего, т. е. если $a_{k+1} \geqslant a_k$ ($a_{k+1} \leqslant a_k$).

Последовательности возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие называются *монотонными*.

4. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*), если все члены ее меньше (больше) некоторого числа, т. е. если $a_n < M$ ($a_n > M$).

Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу, т. е., если $m < a_n < M$.

Все члены ограниченной последовательности $\{a_n\}$ по своей абсолютной величине меньше некоторого числа: $|a_n| < A$.

90. Геометрическое изображение. Подобно тому как вещественному числу геометрически соответствует точка на числовой оси (см. гл. III, п. 43), так последовательности вещественных чисел соответствует последовательность точек на этой оси. Если, например, числовая ось расположена горизонтально, а положительное направление на ней идет слева направо, то переход от первой, второй и т. д. точек, соответствующих первому, второму и т. д. членам возрастающей последовательности, будет происходить тоже слева направо. Постоянной последовательности соответствует только одна точка. Все точки, соответствующие ограниченной последовательности, находятся на некотором отрезке этой оси.

91. Равные и неравные последовательности. 1. Две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называются *равными*, если каждый член одной последовательности равен соответствующему члену другой, т. е. $a_n = b_n$. 2. Если две последовательности не равны и каждый член одной последовательности не превосходит (не больше) соответствующих членов другой, то про первую последовательность говорят, что она *меньше* второй, а про вторую, что она больше первой.

92. Действия с последовательностями. Суммой, разностью, произведением и частным двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называются соответственно последовательности: $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n b_n\}$ и $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$, причем в последнем случае предполагается, что последовательность $\{b_n\}$ не содержит нулей.

93. Предел последовательности и теоремы о пределах. 1. Число a называется *пределом последовательности* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что все значения x_n, у которых $n > N$, удовлетворяют неравенству: $|x_n - a| < \varepsilon$.

Более коротко (но менее точно): число a называется пределом последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, если все члены этой последовательности, начиная с некоторого члена, отличаются от a как угодно мало.

Тот факт, что число a является пределом последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, обозначают символом $\lim x_n = a$ или $x_n \to a$ и словами кратко выражают так: x_n стремится к a.

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, а не имеющая предела — расходящейся.

Предел постоянной последовательности равен члену этой последовательности.

2. Последовательность не может иметь больше одного предела.

3. Предел последовательности не изменится, если в ее начале приписать или исключить несколько членов.

4. Последовательность, имеющая предел, ограничена.

5. Если последовательности равны и одна из них имеет предел, то и другая имеет тот же предел.

6. Если одна последовательность меньше другой и каждая из них имеет предел, то предел первой не больше предела второй.

7. Если последовательность заключена между двумя

другими последовательностями (т. е. больше одной и меньше другой), имеющими общий предел, то и эта последовательность имеет тот же предел.

8. Пределы суммы, произведения и частного двух последовательностей, имеющих пределы, равны соответственно сумме, произведению и частному пределов этих последовательностей, т. е. $\lim (x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$; $\lim (x_n y_n) = \lim x_n \lim y_n$, $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$. При этом в последнем случае (частное) предполагается, что $\lim y_n \neq 0$.

9. Монотонно возрастающая (убывающая) последовательность, ограниченная сверху (снизу), имеет предел.

10. Если монотонно возрастающая последовательность меньше некоторой монотонно убывающей последовательности, а разность их стремится к нулю, то они имеют общий предел.

§ 21. Прогрессии

94. Арифметическая прогрессия. 1. *Арифметической прогрессией* называется такая последовательность чисел, в которой каждое число, начиная со второго, равняется предыдущему, сложенному с одним и тем же постоянным для этой последовательности числом. Это постоянное число называется *разностью прогрессии*, а числа, составляющие прогрессию, называются ее *членами*.

Таким образом, если последовательность a_1, a_2,..., a_n,... есть арифметическая прогрессия, то по определению $a_{k+1} = a_k + d$, где $k = 1, 2, 3,...$, а d — разность прогрессии.

Если $d > 0$, то прогрессия будет *возрастающей*, если $d < 0$, то прогрессия будет *убывающей*.

Пример. Следующие последовательности являются арифметическими прогрессиями: 2, 4, 6, 8,...; 1, —1, —3,...; 3, 3, 3,... Их разности соответственно равны: 2; —2; 0.

2. Всякий член арифметической прогрессии выражается формулой: $a_k = a_1 + (k - 1)\, d$.

3. Всякий член арифметической прогрессии есть среднее арифметическое предыдущего и последующего членов, т. е.

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

4. Во всякой арифметической прогресии $a_m + a_n = a_p + a_q$, если $m + n = p + q$. В частности, если прогрессия имеет конечное число членов, то сумма двух членов, равноотстоящих от ее концов, равна сумме крайних членов.

5. Сумма n первых членов арифметической прогрессии выражается формулами:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2};\quad S_n = \frac{[2a_1 + d(n-1)]\,n}{2}.$$

95. Суммы одинаковых степеней натуральных чисел. Используя формулу суммы n первых членов прогрессии, можно получить формулы:

1) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

2) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

3) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

96. Геометрическая прогрессия. 1. *Геометрической прогрессией* называется такая последовательность чисел, в которой каждое число, начиная со второго, равняется предыдущему, умноженному на одно и то же постоянное для этой последовательности число. Это постоянное число называется *знаменателем прогрессии*, а числа, составляющие прогрессию, называются ее *членами*.

Таким образом, если последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ есть геометрическая прогрессия, то $a_{k+1} = a_k q$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$, а q — знаменатель прогрессии.

Пример. Следующие последовательности являются геометрическими прогрессиями: $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$; $2, -4, 8, -16, \ldots$; $3, 3, 3, \ldots$; $1, 0, 0, \ldots$. Их знаменатели соответственно равны: $\frac{1}{2}, -2, 1, 0$.

2. Всякий член геометрической прогрессии выражается формулой: $a_k = a_1 q^{k-1}$.

3. Всякий член геометрической прогрессии связан с предыдущим и последующим ему членами с помощью формулы: $a^2_k = a_{k-1} a_{k+1}$.

4. Во всякой геометрической прогрессии $a_m a_n = a_p a_q$, если $m + n = p + q$. В частности, если прогрессия имеет

конечное число членов, то произведение двух членов, равноотстоящих от ее концов, равно произведению крайних членов.

5. Сумма n первых членов геометрической прогрессии выражается формулами:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q},$$

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} \quad (q \neq 1).$$

97. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. 1. Если из членов числовой последовательности a_1, $a_2,\ldots, a_n,\ldots$ составить новую последовательность $S_1, S_2,\ldots, S_n,\ldots$, где $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2,\ldots$, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$, то S_1, $S_2,\ldots$, $S_n,\ldots$ называются соответственно первой, второй и т. д. *частными* (или частичными) суммами данной последовательности.

Так, частными суммами геометрической прогрессии

a, aq, ..., aq^{n-1}, ... будут: $S_1 = a$, $S_2 = a + aq = \frac{a(1 - q^2)}{1 - q}$, ..., $S_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$, ...

2. Если у бесконечной геометрической прогрессии знаменатель по абсолютной величине меньше единицы, то последовательность ее частных сумм имеет предел. Он равен частному от деления первого члена на разность между единицей и знаменателем этой прогрессии.

Суммой бесконечной геометрической прогрессии, знаменатель которой по абсолютной величине меньше единицы, называется предел последовательности ее частных сумм. Так как такую геометрическую прогрессию обычно называют *бесконечно убывающей*, то можно сказать, что сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна частному от деления первого члена на разность между единицей и знаменателем этой прогрессии, т. е.

$$S = \frac{a}{1 - q}.$$

Пример. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$.

Решение. $S = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

3. Известное правило обращения периодической (чистой и смешанной) дроби в простую может быть доказано с помощью суммирования бесконечно убывающей геометрической прогрессии, к виду которой периодическую дробь можно привести.

Пример. Пользуясь бесконечно убывающей геометрической прогрессией, обратить периодическую дробь 0,(2) в простую.

Решение. Данную дробь можно представить так: $\frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \ldots$.

Сумма этой прогрессии равна: $S = \frac{2}{9}$.

Итак, $0,(2) = \frac{2}{9}$.

§ 22. Соединения

98. Размещения. 1. Если из некоторого числа различных предметов (*элементов*) составляются группы этих предметов, отличающихся одна от другой самими предметами или их порядком, то такие группы называются *соединениями*.

2. *Размещениями* из m элементов по n называются соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m элементов, и отличается от другого или элементами, или порядком элементов.

3. Число всевозможных размещений из m по n может быть найдено по формуле:

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).$$

Пример. Сколько различных двузначных чисел может быть составлено из цифр 1, 2, 3?

Решение. $A_3^2 = 3 \cdot (3-1) = 3 \cdot 2 = 6$.

99. Перестановки 1. *Перестановками* из m элементов называются соединения, каждое из которых содержит m этих элементов и отличается от другого порядком элементов.

2. Число всевозможных перестановок из m элементов может быть найдено по формуле:

$$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)\ldots 2\cdot 1 = m!$$

Выражение $m!$ есть краткое обозначение произведения $1\cdot 2\ldots m$ и называется *m-факториал*. При $m = 1$ и при $m = 0$ полагают по определению: $1! = 1$, $0! = 1$.

Пример. Каким числом способов можно рассадить 8 зрителей в ряду в 8 мест?

Решение. $P_8 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 40\,320$.

100. Сочетания. 1. *Сочетаниями* из m элементов по n называются соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m элементов, и отличается от другого хотя бы одним элементом.

2. Число всевозможных сочетаний из m элементов по n может быть найдено по формуле:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}.$$

3) $C_m^n = C_m^{m-n}$.

Пример. $C_{125}^{123} = C_{125}^2 = \frac{125\cdot 124}{1\cdot 2} = 7750$.

Замечание. В математике рассматривают также и другие виды соединений: размещения с повторениями, перестановки с повторениями, сочетания с повторениями. Интересующихся отсылаем к книге: С. И. Новоселов, Специальный курс элементарной алгебры, изд. «Советская наука», 1951, стр. 495 — 502.

101. Метод математической индукции. Для доказательства формул вычисления A_m^n, P_m, C_m^n недостаточно убедиться в справедливости их для определенных m и n. То же относится и ко многим другим формулам математики, например: $a_n = a_1 q^{n-1}$, $a_n = a_1 + (n-1)d$ (прогрессии). Для доказательства их применяют метод математической индукции. В основе этого метода лежит следующий принцип.

Если некоторое утверждение справедливо для $n = 1$ и если из справедливости его для какого-нибудь произвольного натурального $n = k$ следует справедливость утверждения и для $n = k + 1$, то это утверждение справедливо и для всякого натурального n.

Пример. Вывести формулу общего члена арифметической прогрессии, т. е. $a_k = a_1 + (n-1)d$.

Она верна для $n = 1$, так как тогда будет $a_1 = a_1$. Предположим, что формула верна для $n = k$, т. е. $a_k = a_1 + (k - 1)d$.

Тогда $a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k - 1)d + d = a_1 + kd$. Следовательно, формула $a_n = a_1 + (n - 1)d$ верна для всех натуральных n.

§ 23. Бином Ньютона

102. Произведение биномов (двучленов), отличающихся только вторыми членами.

$$(x + a_1)(x + a_2) \ldots (x + a_n) = \\ = x^n + S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} + \ldots + S_n,$$

где $S_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ (сумма всех вторых членов),

$S_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_na_{n-1}$ (сумма всех произведений вторых членов, взятых по два) и т. д.

$S_n = a_1a_2 \ldots a_n$ (произведение всех вторых членов). Эта формула доказывается с помощью метода математической индукции.

103. Формула бинома Ньютона. Следующая формула, представляющая выражение $(x + a)^n$ при n натуральном в виде приведенного многочлена, называется формулой бинома Ньютона:

$$(x + a)^n = x^n + C^1_n x^{n-1} a + \ldots + C^k_n x^{n-k} a^k + \ldots + a^n,$$

или

$$(x + a)^n = x^n + nx^{n-1} a + \ldots + \\ + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k} x^{n-k} a^k + \ldots + a^n.$$

Многочлен, стоящий в правой части формулы, называется *разложением бинома*.

104. Свойства формулы бинома Ньютона. 1. Разложение является многочленом, расположенным по убывающим степеням буквы x и по возрастающим степеням буквы a. Наибольший показатель этих букв равен n, а наименьший 0.

2. Число членов разложения на единицу больше показателя бинома.

3. Первый член равен x^n, а любой другой может быть вычислен по следующей формуле *общего члена разложения*:

$$T_{k+1} = C^k_n x^{n-k} a^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k} x^{n-k} a^k.$$

Коэффициенты разложения называются *биномиальными*.

4. Коэффициент следующего члена разложения равен коэффициенту предыдущего, умноженному на показатель степени буквы x в этом члене и поделенному на число членов, предшествующих определяемому.

5. Биномиальные коэффициенты возрастают от единицы до некоторого наибольшего числа и затем убывают от этого наибольшего до единицы. Наибольший коэффициент один, если показатель бинома четное число, и он принадлежит члену, находящемуся посередине разложения. Наибольших коэффициентов будет два, если показатель бинома нечетное число, и они принадлежат членам, находящимся посередине разложения.

6. Коэффициенты членов, равноотстоящих от концов разложения, равны.

7. Сумма коэффициентов всех членов разложения равна 2^n.

8. Сумма коэффициентов разложения, стоящих на четных местах, равна сумме коэффициентов разложения, стоящих на нечетных местах.

Пример. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5 = x^5 + 5x^4 \cdot \frac{1}{x} + 10x^3 \cdot \frac{1}{x^2} +$

$+ 10x^2 \frac{1}{x^3} + 5x \cdot \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} = x^5 + 5x^3 + 10x + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5}.$

§ 24. Логарифмы

105. Общие свойства логарифмов. 1. *Логарифмом* числа N по данному основанию a называется показатель степени x, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число N.

Таким образом, по определению, если $x = \log_a N$, то $a^x = N$ или $a^{\log_a N} = N$. Основание a предполагается положительным, но не равным единице.

Пример. $\log_2 0{,}25 = -2$, так как $2^{-2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

2. Всякое положительное число по любому основанию имеет единственный логарифм.

3. Число нуль и отрицательные числа не имеют логарифмов.

4. Логарифм единицы равен нулю.

5. Логарифм самого основания равен единице.

6. При основании, большем единицы, большему числу соответствует и больший логарифм. В частности, при этом условии логарифмы чисел, больших единицы, положительны, а логарифмы чисел, меньших единицы, отрицательны.

7. При основании, меньшем единицы, большему числу соответствует меньший логарифм.

8. Если основание логарифмов больше единицы, то при неограниченном возрастании числа неограниченно возрастает и его логарифм, а при стремлении числа (положительного) к нулю его логарифм, оставаясь отрицательным, неограниченно возрастает по абсолютной величине.

9. Если основание логарифмов меньше единицы, то при неограниченном возрастании числа его логарифм, оставаясь отрицательным, неограниченно возрастает по абсолютной величине, а при стремлении числа (положительного) к нулю, его логарифм неограниченно возрастает.

10. $\log_a N = \log_{a^n} N^n$.

Пример. $\log_9 4 = \log_3 2$, так как $\log_9 4 = \log_{3^2} 2^2 = \log_3 2$.

106. Логарифм произведения положительных сомножителей равен сумме логарифмов этих сомножителей, т. е.

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Если сомножители x и y отрицательные, то

$$\log_a (xy) = \log_a (-x) + \log_a (-y).$$

Вообще, если сомножители x и y одного знака, то

$$\log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y|.$$

107. Логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя, т. е.

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

Если числа x и y отрицательные, то

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a (-x) - \log_a (-y).$$

Вообще, если числа x и y одного знака, то

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|.$$

108. Логарифм степени положительного числа равен показателю степени, умноженному на логарифм этого числа, т. е.

$$\log_a x^n = n \log_a x.$$

Если число x отрицательное, а n—четное, то

$$\log_a x^n = n \log_a (-x).$$

При четном n и любом $x \neq 0$

$$\log_a x^n = n \log_a |x|.$$

Пример. $\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_3 3 = \frac{1}{2}$.

109. Логарифмирование и потенцирование. *Логарифмировать* алгебраическое выражение — значит представить логарифм этого выражения через логарифмы частей, составляющих его.

Пример. $\log \frac{0{,}25^3}{3\sqrt{2}} = 3 \log 0{,}25 - \log 3 - \frac{1}{2} \log 2 =$

$$= 3 \log \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \log 3 - \frac{1}{2} \log 2 = -6 \log 2 - \log 3 - \frac{1}{2} \log 2 =$$

$$= -\log 3 - 6{,}5 \log 2.$$

2. Операция *потенцирования* состоит в разыскании выражения по результату его логарифмирования.

Пример. Если $\log x = 2 \log a - 3 \log b$, то $x = \frac{a^2}{b^3}$.

110. Переход от одного основания логарифмов к другому. 1. Если известен логарифм числа по основанию a и требуется найти логарифм этого числа по основанию b, то нужно первый умножить на величину $\frac{1}{\log_a b}$, называемую *модулем перехода*. Таким образом, $\log_b N = \log_a N \cdot \frac{1}{\log_a b}$. В частности, $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$.

2. В практических вопросах употребляют логарифмы с основанием, равным 10, которые называются *десятичными*. В теории приняты *натуральные* логарифмы. Основанием натуральных логарифмов является трансцендентное число (см. п. 44) $e = 2{,}71828...$ Десятичные логарифмы

принято обозначать знаком lg, а натуральные знаком ln. Переход от одной системы логарифмов к другой совершается по формулам:

$$\lg N = \ln N \cdot \lg e = 0{,}43429 \ln N;$$
$$\ln N = \lg N \cdot \frac{1}{\lg e} = \frac{\lg N}{0{,}43429} = 2{,}30259 \lg N.$$

Число $0{,}43429 = \lg e$ называется *модулем десятичных логарифмов* и обозначается через M.

111. Свойства десятичных логарифмов. 1. Логарифмы чисел 10, 100, 1000, ... равны 1, 2, 3, ..., т. е. состоят из такого числа положительных единиц, сколько в числе имеется нулей.

2. Логарифмы чисел 0,1 0,01, 0,001, ... равны — 1, —2, —3, ..., т. е. состоят из такого числа отрицательных единиц, сколько в числе нулей предшествует единице, считая и нуль целых.

3. Логарифмы чисел, не являющиеся числами вида 10^n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), выражаются иррациональными числами. Целая часть логарифма называется его *характеристикой*, а дробная — *мантиссой*.

4. Характеристика логарифма числа, большего единицы, на единицу меньше числа цифр его целой части,

Пример. $\lg 2,12 = 0, \ldots$; $\lg 125 = 2, \ldots$; $\lg 5000 = 3, \ldots$.

Характеристика логарифма числа, меньшего единицы, содержит столько отрицательных единиц, сколько нулей в этом числе предшествует первой значащей цифре, считая и нуль целых. При этом мантисса логарифма положительна.

Пример. $\lg 0{,}25 = \bar{1}, \ldots$; $\lg 0{,}03 = \bar{2}, \ldots$.

5. От умножения или деления числа на 10, 100, 1000, вообще на единицу с последующими нулями, мантисса не меняется, а меняется только характеристика.

Поэтому перенесение запятой в десятичной дроби на несколько знаков вправо или влево не изменит мантиссы логарифма этой дроби, а изменит только характеристику.

6. Если логарифм числа отрицательный, то его обычно приводят к такой форме, в которой характеристика отрицательна, а мантисса положительна. Для этого достаточно абсолютное значение характеристики увеличить на единицу, а абсолютную величину мантиссы вычесть из единицы. Первый результат даст отрицательную характеристику логарифма, а второй — положительную мантиссу.

Пример. $\lg 0,5 = -0,30103 = \bar{1},69897$

При логарифмических вычислениях приходится складывать и вычитать логарифмы, а также умножать логарифмы на число. Наличие среди них логарифмов с отрицательными характеристиками и положительными мантиссами мало меняет дело. Но важно помнить, что окончательный результат должен быть записан обязательно с положительной мантиссой, если по нему, как по логарифму, придется искать число в таблице логарифмов.

Пример. $\lg \frac{5}{49} = \lg 5 - 2\lg 7 = 0,6990 - 2 \cdot 0,8451 =$

$= 0,6990 - 1,6902 = 0,6990 + \bar{2},3098 = \bar{1},0088.$

§ 25. Таблицы десятичных логарифмов

112. Таблицы логарифмов. Наиболее употребительные таблицы десятичных логарифмов чисел — это четырехзначные таблицы В. М. Брадиса и пятизначные — Е. Пржевальского. В них даны лишь мантиссы, так как характеристики находятся непосредственно по данному числу. В средней школе пользуются исключительно таблицами Брадиса, и приведенные ниже примеры решены с помощью этих таблиц.

113. Отыскание логарифма числа. 1. Найдем логарифм *трехзначного* числа 73,3. Его характеристика 1, так как в числе 73 две цифры. Чтобы найти мантиссу, отбрасываем запятую и ищем мантиссу числа 733. Для этого обращаемся к таблице I Брадиса и в столбце, обозначенном буквой N, находим число 73 (стр. 5 таблицы). Двигаясь по строке, в которой находится число 73, до пересечения ее со столбцом, обозначенным цифрой 3, находим число 8651. Число 0,8651 и будет искомая мантисса.

Итак, $\lg 73,3 = 1,8651$.

2. Найдем логарифм *двузначного числа* 70. Приписав справа нуль, получим число 700 и будем искать логарифм трехзначного числа, как изложено в п. 1. Найдем $\lg 70 = 1,8451$.

Если бы число было *однозначное*, то пришлось бы предварительно приписать справа два нуля.

3. Найдем логарифм *четырехзначного числа* 6723. Характеристика его равна 3. Чтобы найти мантиссу этого числа, отбрасываем крайнюю правую цифру 3 и ищем ман-

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5

тиссу числа 672. Она равна 0,8274. Затем находим в столбцах поправок (крайние правые столбцы с цифрами 1 — 9) в столбце, обозначенном цифрой 3, и в той же строке, что и число 67, поправку 2. Поэтому мантисса данного числа получится как сумма 0,8274 + 0,0002 = 0,8276.

Записываем это так:

$$\begin{array}{r} \lg 6720 = 3{,}8274 \\ +3 \qquad +2 \\ \hline \lg 6723 = 3{,}8276 \end{array}$$

114. Интерполяция. Поправку на четвертую цифру можно найти, не пользуясь столбцами поправок (а в некоторых таблицах они не даются). Для этого поступаем так.

Если число, мантиссу логарифма которого нужно найти, есть 6723, то сначала находим мантиссу числа 672 (она равна 0,8274), затем мантиссу числа 673 (она равна 0,8280), после этого находим разность мантисс (она равна 6 десятитысячным), и, допуская, что логарифм числа изменяется пропорционально изменению числа, находим поправку с помощью пропорции: $x : 3 = 6 : 10$, $x = \frac{3 \cdot 6}{10} \approx 2$ десятитысячным. Этот способ нахождения промежуточного значения логарифма по двум рядом стоящим в таблице его значениям называется *интерполяцией*, или *интерполированием*.

115. Отыскание числа по его логарифму. 1. Для отыскания числа по данному логарифму можно пользоваться теми же таблицами, что и для отыскания логарифма по числу. Но существуют и специальные для этого таблицы под названием *антилогарифмы*.

2. Найдем число, логарифм которого 1,3846.

Обращаемся к таблице II Брадиса и в столбце, обозначенном буквой m, находим число 38 (стр. 7 таблицы). Двигаясь по строке, в которой находится число 38, до пересечения ее со столбцом, обозначенным цифрой 4 (третья цифра мантиссы), находим число 2421 и, двигаясь далее по этой строке до пересечения ее со столбцом поправок, обозначенным цифрой 6 (четвертая цифра мантиссы), находим число 3. Два найденных числа складываем: 2421 + + 3 = 2424. Так как характеристика логарифма равна 1, то искомое число 24,24.

II. АНТИЛОГАРИФМЫ

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
,35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	*1*	*1*	*2*	*2*	*3*	*3*	*4*	*4*	*5*
,36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	*1*	*1*	*2*	*2*	*3*	*3*	*4*	*4*	*5*
,37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	*1*	*1*	*2*	*2*	*3*	*3*	*4*	*4*	*5*
,38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	*1*	*1*	*2*	*2*	*3*	*3*	*4*	*4*	*5*
,39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	*1*	*1*	*2*	*2*	*3*	*3*	*4*	*5*	*5*
,40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	*1*	*1*	*2*	*2*	*3*	*4*	*4*	*5*	*5*
,41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	*1*	*1*	*2*	*2*	*3*	*4*	*4*	*5*	*5*
,42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	*1*	*1*	*2*	*2*	*3*	*4*	*4*	*5*	*6*
,43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	*1*	*1*	*2*	*3*	*3*	*4*	*4*	*5*	*6*
,44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	*1*	*1*	*2*	*3*	*3*	*4*	*4*	*5*	*6*

§ 26. Показательные и логарифмические уравнения

116. Показательные уравнения. 1. *Показательными уравнениями* называются такие уравнения, в которых неизвестное входит в показатель степени. Методами элементарной математики могут быть решены лишь некоторые частные случаи таких уравнений.

2. Если $a \neq 1$, то уравнения $a^x = a^y$ и $x = y$ эквивалентны. Если же a тоже содержит неизвестные, то $a^x = a^y$ и $x = y$ могут не быть эквивалентными, например, в том

случае, когда при некоторых значениях неизвестных будет $a = 1$, но $x \neq y$.

Примеры. а) $2^{x+1} - 3 \cdot 2^{x-1} = 2$; $2^{x-1}(2^2 - 3) = 2$; $2^{x-1} = 2$; $x - 1 = 1$; $x = 2$;

б) $x^{x+1} = x^3$. Может быть $x + 1 = 3$ или $x = 1$. Отсюда $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

в) $4^x + 6^x = 9^x$; $\left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 = 0$; $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $x \lg \frac{2}{3} = \lg \frac{\sqrt{5}-1}{2}$;

$$x = \frac{\lg(\sqrt{5}-1) - \lg 2}{\lg 2 - \lg 3}.$$

117. Логарифмические уравнения. 1. *Логарифмическими уравнениями* называются такие уравнения, в которых неизвестное входит под знак логарифма.

2. При решении логарифмических уравнений часто приходится логарифмировать и потенцировать обе части уравнения. То же бывает и при решении показательных уравнений. Указанные операции могут привести к уравнениям, не эквивалентным данным. Следует это иметь в виду, чтобы не потерять корни и не приобрести посторонние.

Так, если A и B являются выражениями, содержащими неизвестные, то следующие уравнения, вообще говоря, будут неэквивалентными:

а) $A = B$ и $\lg A = \lg B$;

б) $\lg(AB) = C$ и $\lg A + \lg B = C$;

в) $\lg \frac{A}{B} = C$ и $\lg A - \lg B = C$;

г) $\lg A^n = C$ и $n \lg A = C$ (n—четное).

Это вытекает из того, что для вторых уравнений требуется, чтобы было $A > 0$ и $B > 0$, а для первых они могут быть одного знака (для уравнения $A = B$ они могут быть равны нулю). Но если $A > 0$ и $B > 0$, то уравнения эквивалентны.

Пример. Решить уравнения: а) $\log(2x + 1) = \log x$; б) $\log x^2 = 0$; в) $\log(x + 1) + \log(x - 1) = \log 3$.

Решения. а) $2x + 1 = x$, $x = -1$. Уравнение не имеет решения, так как обе части уравнения теряют смысл при $x = -1$.

б) $2\log x = 0$; $\log x = 0$; $x_1 = 1$. Потерян корень $x_2 = -1$.

в) $\log(x+1)(x-1) = \log 3$, $\log(x^2-1) = \log 3$, $x^2 - 1 = 3$, $x^2 = 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Корень $x_2 = -2$ посторонний.

118. Формула сложных процентов. Если к вкладу в a руб. в конце года присоединяются $p\%$ вклада и в последующий год проценты начисляются с наращенного вклада, то говорят, что на вклад начисляются *сложные проценты*. Через t лет вклад обратится в сумму A, которая вычисляется по формуле:

$$A = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t.$$

Если же с суммы a сложные проценты по-прежнему исчисляются по $p\%$ годовых, но начисление производится не по прошествии года, а по прошествии $\frac{1}{n}$ года, то через t лет образуется сумма: $A = a\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nt}$.

§ 27. Функции и их графики

119. Постоянные и переменные. 1. *Постоянная* величина — это такая величина, которая в условиях данной задачи принимает только одно значение. *Переменная* величина — это такая величина, которая в условиях данной задачи принимает различные значения. Переменная считается *заданной*, если указано множество значений, которые она может принимать. Это множество значений переменной называется *областью изменения* этой переменной. На постоянную можно смотреть как на переменную, множество значений которой состоит из одного элемента (числа). В этом смысле *постоянная есть частный случай переменной*.

Переменные и постоянные обозначаются буквами, которым приписываются числовые значения.

2. Множества значений переменной могут быть самые разнообразные. В элементарной математике наиболее употребительные множества — это последовательность (см. гл. III, § 20) и *промежуток*. Если переменная принимает значения членов числовой последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, то ее обычно обозначают x_n. При этом самое последовательность называют просто «переменная x_n».

Промежутком, или *сегментом* $[a, b]$, называется множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$. Его называют также *замкнутым промежутком* в отличие от множества всех чисел, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, называемым *открытым промежутком* (a, b) или *интервалом* (a, b). Есть также *полуоткрытый промежуток*, или *полусегмент*, $[a, b)$ и *полуоткрытый промежуток*, или *полуинтервал*, $(a, b]$, соответствующие множествам всех вещественных чисел, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$ — в первом случае и $a < x \leqslant b$ — во втором.

Также называют промежутками множества всех чисел x, удовлетворяющих неравенствам $x < b$ или $x > a$, которые обозначают соответственно $(-\infty, b)$ и $(a, +\infty)$. Множество всех вещественных чисел называют промежутком $(-\infty, +\infty)$.

Символы $+\infty$ и $-\infty$ читаются «плюс бесконечность» и «минус бесконечность».

120. Функция и аргумент. 1. Переменная величина y называется *функцией* переменной величины x (в области изменения x), если каждому значению x (из этой области) соответствует одно (*однозначная функция*) или несколько определенных значений y.

В последнем случае функция называется *многозначной*.

Величина x называется *аргументом* или *независимой переменной*. Определение не исключает того случая, когда y равна постоянной.

Область изменения аргумента x называется *областью определения* функции y.

2. Тот факт, что величина y есть функция величины x, обозначают так: $y = f(x)$ и читают: «y есть эф от x». Конечно, употребляются и другие буквы: $F(x)$, $\varphi(x)$ и т. д.

3. Переменную, принимающую значения членов последовательности, можно рассматривать как функцию целочисленного аргумента.

121. Способы задания функции. Функция может быть задана с помощью формулы, т. е. *аналитическим способом*. Например, площадь и радиус круга связаны формулой: $S = \pi r^2$. Но далеко не всегда это возможно. Есть другие способы — *табличный и графический*. Табличный способ состоит в задании таблицы, где записаны значения функции, соответствующие некоторым значениям аргумента. На-

пример, задание функции $\lg x$ четырехзначными таблицами. Способ *графический*, см. гл. III, п. 123.

122. Определение положения точки на плоскости. Возьмем произвольную прямую. Она имеет два противоположных друг другу направления. Будем одно из них считать *положительным*. Такая прямая, на которой выбрано положительное направление, называется *осью*. Положительное направление на оси обозначается стрелкой (рис. 10).

Рис. 10.

2. Выберем линейную единицу для измерения длин и отметим какую-нибудь точку O на оси (рис. 10). Тогда положение любой точки M этой оси определится числом, равным расстоянию от нее до точки O, взятым со знаком плюс, если направление от O к M совпадает с направлением оси, и со знаком минус — в противном случае.

Возьмем теперь две взаимно перпендикулярные оси OX и OY (рис. 11) и будем точку O считать начальной для обеих осей. Выберем линейную единицу для измерения длин. Положение любой точки M плоскости можно определить с помощью двух чисел следующим способом. Пусть основание перпендикуляра, опущенного из точки M на ось OX, есть M_1 (проекция точки M на OX) и на ось OY — M_2. Числа x и y, определяющие соответственно положение M_1 на оси OX и M_2 — на оси OY, будут определять положение точки M на плоскости.

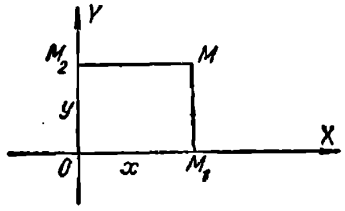

Рис. 11.

Числа, определяющие положение точки, называются координатами точки.

3. Оси OX и OY образуют прямоугольную систему координат. Ось OX называется осью абсцисс, ось OY — осью ординат, точка O — началом координат, числа x и y — прямоугольными координатами точки M.

Что числа x и y являются координатами точки M — обозначается так: $M(x, y)$. Координата x называется *абсциссой*, а y — *ординатой*.

В данной системе прямоугольных координат каждая точка плоскости имеет одну вполне определенную пару

координат x и y. Обратно, каковы бы ни были вещественные числа x и y, на плоскости найдется вполне определенная точка, имеющая абсциссу x и ординату y.

Точки оси абсцисс имеют $y = 0$; точки оси ординат имеют $x = 0$; в начале координат $x = 0$ и $y = 0$.

123. Графическое изображение функции. 1. Если имеется уравнение $y = f(x)$, связывающее аргумент x с функцией y, то оно может иметь конечное или бесконечное множество вещественных решений. Будем каждому решению (x, y) уравнения приводить в соответствие точку M плоскости, абсцисса которой x, а ордината y. Геометрическое место точек (или множество, совокупность всех точек) плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = f(x)$, называется *графиком уравнения* $y = f(x)$ или *графиком функции* $f(x)$.

График может быть сплошной линией и уравнение, которому она соответствует, называется уравнением этой линии, но он может быть и совокупностью изолированных точек, а также комбинацией линий и точек.

2. Чтобы построить график функции, когда известно уравнение, связывающее функцию и аргумент, нужно, вообще говоря, построить все решения этого уравнения, что практически невозможно. Поэтому обычно составляют таблицу некоторых значений функции и аргумента, строят с помощью ее ряд точек графика и соединяют их плавной линией. Такой способ носит название *построения по точкам*.

3. Иногда функция задается сразу графиком, абсциссы и ординаты точек которого являются аргументом и функцией. В этом и состоит графический способ задания функции (см. гл. III, п. 121).

124. Прямая и обратная функции. Если в данной функциональной зависимости поменять ролями функцию и аргумент, то вновь полученная функция называется *обратной* по отношению к первоначальной. В свою очередь и исходная функция является обратной по отношению к полученной. Графики прямой и обратной функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Примеры. Следующие пары функций являются взаимно обратными: а) $y = 3x$ и $y = \frac{1}{3}x$; б) $y = \log_{10} x$ и $y = 10^x$; в) $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{1}{x}$.

125. Возрастающая (убывающая) функция. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) в некотором промежутке, если она определена в этом промежутке и если для любой пары x_1 и x_2 принадлежащих ему значений из $x_1 > x_2$ следует: $f(x_1) > f(x_2)$ $[f(x_1) < f(x_2)]$.

Иначе: функция возрастает, если с увеличением значений аргумента увеличиваются и соответствующие им значения функции.

126. Схема построения графика. При построении графика функции нужно изучить свойства функции, исследовать функцию. Построение графика функции «по точкам», без учета ее свойств и особенностей, может привести к грубым ошибкам. Для построения графика функции нужно в первую очередь найти область определения функции. Затем полезно выяснить промежутки возрастания и убывания функции, найти, если возможно, ее наибольшее и наименьшее значения, найти значения функции на границах области определения. После этого полезно взять несколько точек для уточнения линии, в частности точки пересечения линии с осями координат. Важно также помнить, что если функция $y = f(x)$ четная, т. е. $f(-x) = f(x)$, то ее график есть линия, симметричная относительно оси ординат; если функция $y = f(x)$ нечетная, т. е. $f(-x) = -f(x)$, то ее график есть линия, симметричная относительно начала координат.

Примеры. а) Следующие функции являются четными: $\frac{1}{1+x^2}$, $\lg x^4$, $2^x + 2^{-x}$, $\cos x$; б) следующие функции являются нечетными: $\frac{x}{1+x^2}$, $x^3 \lg |x|$, $2^x - 2^{-x}$, $\sin x$.

127. Линейная функция. *Линейной функцией* называется функция, заданная формулой: $y = ax + b$, где x — аргумент и a, b — постоянные.

Область определения ее есть промежуток $(-\infty, +\infty)$, т. е. множество всех вещественных чисел. В этой области она возрастающая, если $a > 0$, убывающая, если $a < 0$, и постоянная, если $a = 0$. График линейной функции есть прямая линия, отсекающая на оси ординат *направленный* отрезок, равный b, считая от начала координат, и наклоненная к оси абсцисс под таким углом, тангенс которого равен a (см. рис. 12 — 14).

Замечание. Уравнение $Ax + By + C = 0$ с двумя переменными x и y при $B \neq 0$ приводится к виду:

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, а при $B = 0$ — к виду: $x = -\frac{C}{A}$. Поэтому, если A и B не равны нулю одновременно, то графиком уравнения $Ax + By + C = 0$ будет прямая линия, причем при $B = 0$ эта прямая параллельна оси ординат и величи-

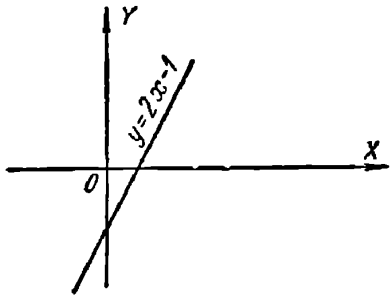

Рис. 12.

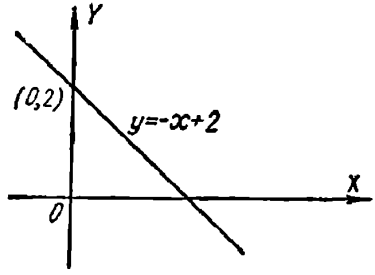

Рис. 13.

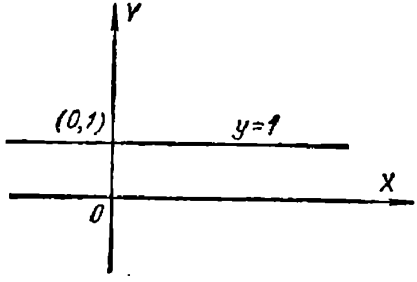

Рис. 14.

на направленного отрезка, отсекаемого ею на оси абсцисс, равна $-\frac{C}{A}$.

128. График прямой пропорциональности. Известно, что прямо пропорциональные величины x и y связаны соотношением: $y = kx$ (гл. II, п. 63). Но функция $y = kx$ линейная ($b = 0$). Поэтому графиком прямой пропорциональной зависимости является прямая линия, проходящая через начало координат и наклоненная к оси абсцисс под таким углом φ, что $\operatorname{tg}\varphi = k$.

129. График обратной пропорциональности. Известно, что обратно пропорциональные величины x и y связаны соотношением: $xy = k$ (гл. II, п. 63).

Областью определения функции $y = \frac{k}{x}$ является множество всех вещественных чисел, за исключением $x = 0$, т. е. состоит из двух открытых промежутков $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. В каждом из этих промежутков она убывает, если $k > 0$, и возрастает, если $k < 0$. График функции симметричен относительно начала координат, так как функция $\frac{k}{x}$ нечетная. Линия, являющаяся графиком обратной пропорциональной зависимости, называется *равносторонней гиперболой* (рис. 15).

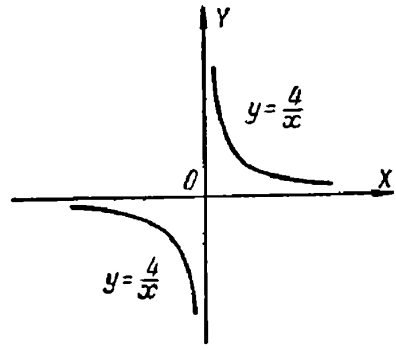

Рис. 15.

130. Квадратная функция. 1. *Квадратной функцией* называется функция, заданная формулой: $y = ax^2 + bx + c$, где x — аргумент и a, b, c — постоянные. Область ее определения $(-\infty, +\infty)$.

2. В случае $a > 0$ и $b = c = 0$ функция $y = ax^2$ убывающая в промежутке $(-\infty, 0)$ и возрастающая в промежутке $(0, +\infty)$. Ее значения растут неограниченно

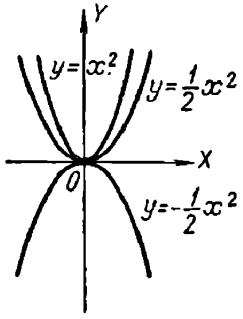

Рис. 16.

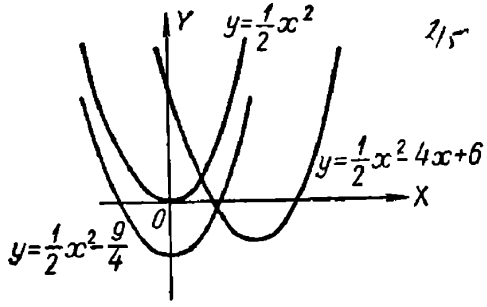

Рис. 17.

при неограниченном возрастании $|x|$. При $x = 0$ она имеет наименьшее значение, равное нулю. График ее симметричен относительно оси ординат, так как функция ax^2 четная, расположен над осью абсцисс, так как $ax^2 \geqslant 0$, проходит через начало координат и состоит из двух бесконечных ветвей, соединяющихся в начале координат (рис. 16). Полученная кривая называется *параболой*. Ось

ординат, являющаяся осью симметрии параболы, называется *осью параболы*, а точка O пересечения оси с параболой — ее *вершиной*.

График функции $y = ax^2$ при $a<0$ симметричен графику функции $y = ax^2$ при $a>0$ относительно оси абсцисс (рис. 16).

3. В общем случае график функции $y = ax^2 + bx + c$ будет такой же, как и график функции $y = ax^2$, но вершина ее будет находиться не в начале координат, а в точке $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$, а ось параллельна оси ординат (рис. 17).

131. Показательная функция. *Показательной функцией* называется функция, заданная формулой: $y = a^x$, где x — аргумент и a — положительное число, не равное единице.

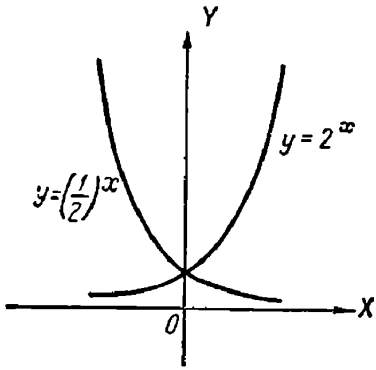

Рис. 18.

Область определения функции — множество всех вещественных чисел. Показательная функция возрастающая при $a>1$ и убывающая при $0<a<1$. При неограниченном возрастании x функция a^x неограниченно возрастает, если $a>1$, и стремится к нулю, если $0<a<1$. Наоборот, при $x<0$ и неограниченном возрастании $|x|$ функция a^x стремится к нулю, когда $a>1$, и неограниченно возрастает, когда $0<a<1$.

График показательной функции расположен выше оси абсцисс, т. е. там, где ординаты точек положительны. Он пересекается в одной точке со всякой прямой, параллельной оси ординат, и в одной точке со всякой прямой, параллельной оси абсцисс, проведенной выше начала координат. Ось ординат пересекается графиком в точке (0, 1) (см. рис. 18).

132. Логарифмическая функция. *Логарифмической функцией* называется функция, заданная формулой: $y = \log_a x$, где x — аргумент и a — положительное число, не равное единице.

Область определения функции — множество всех положительных чисел. Логарифмическая функция возрастающая, если $a>1$, и убывающая, если $0<a<1$. При неогра-

ниченном возрастании x функция неограниченно возрастает при $a>1$ и неограниченно убывает при $0<a<1$. Наоборот, при стремлении x к нулю функция неограниченно убывает при $a>1$ и неограниченно возрастает при $0<a<1$.

Так как по определению логарифма равенство $y=\log_a x$ равносильно равенству $a^y = x$, то логарифмическая и

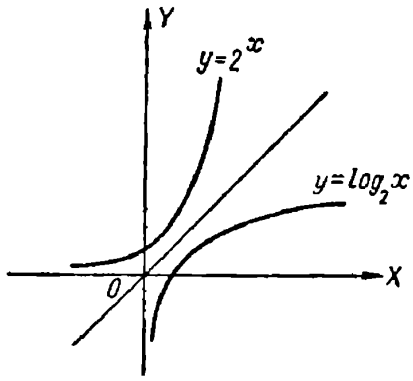

Рис. 19.

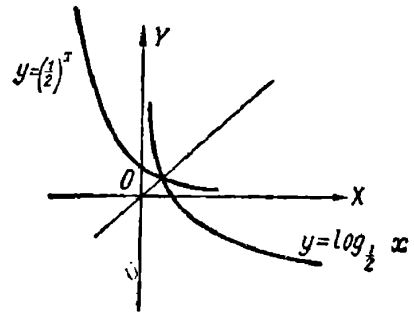

Рис. 20.

показательная функции — взаимно обратные (см. гл. III, п. 124). Поэтому график функции $y = \log_a x$ будет симметричен графику функции $y = a^x$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис. 19 и 20).

§ 28. Определители второго порядка

133. Определения. Рассмотрим систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

Если $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, то она имеет единственное решение (п. 72, гл. III) в виде

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Из этих формул видно, что числитель дроби для неизвестного x составлен из чисел c_1, b_2, c_2, b_1 так же, как его знаменатель из чисел a_1, b_2, a_2, b_1. Аналогично числитель дроби для y составлен из чисел a_1, c_2, a_2, c_1 по тому же правилу, что и знаменатель из чисел a_1, b_2, a_2, b_1. Такие числа, получаемые из данных четырех чисел по правилу, про-

иллюстрированному на этом примере, получили название *определителей второго порядка.*

Дадим определение определителя второго порядка. *Определителем второго порядка*, соответствующим таблице

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}$$

из четырех чисел, называется число $a_1 b_2 - a_2 b_1$.

Определитель обозначается символом

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Таким образом, по определению:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Числа a_1, b_1, a_2, b_2 называются *элементами определителя*, причем про элементы a_1 и b_2 говорят, что они расположены (или лежат) *на главной диагонали*, а элементы b_1 и a_2 — *на побочной диагонали.* Поэтому можно высказать такое правило: определитель второго порядка равен разности между произведениями чисел, расположенных на главной и побочной диагоналях.

Про пары элементов a_1, b_1 и a_2, b_2 говорят, что они образуют *строки определителя* (соответственно *первую* и *вторую*). Аналогично элементы a_1 и a_2 образуют *первый столбец*, а элементы b_1 и b_2 — *второй.*

Пример. Вычислить определитель: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

Решение. $\Delta = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5.$

134. Свойства определителей второго порядка. 1. Определитель не изменится, если его первую и вторую строки заменить соответственно первым и вторым столбцами.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Или кратко: столбцы и строки играют одинаковую роль.

Это свойство, как и дальнейшие, можно доказать, пользуясь правилом вычисления определителя. В данном случае для обеих частей равенства получим одно и то же число $a_1 b_2 - a_2 b_1$.

2. Перестановка строк (или столбцов) определителя равносильна умножению его на -1.

Например: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$

3. Если соответствующие элементы строк (или столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Например: $\begin{vmatrix} a_1 & ka_1 \\ b_1 & kb_1 \end{vmatrix} = 0.$

4. Если определитель равен нулю, то соответствующие элементы строк (или столбцов) пропорциональны.

Например, если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, то $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$, или $a_1 = k_1 b_1$, $a_2 = k_1 b_2$.

5. Если к элементам строки (или столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (или другого столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится.

Например: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + ka_1 \\ a_2 & b_2 + ka_2 \end{vmatrix}$

Пример. Вычислить определитель: $\Delta = \begin{vmatrix} 37 & 75 \\ 29 & 60 \end{vmatrix}$

Решение. Пользуясь дважды свойством 5, получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 37 & 75 - 2 \cdot 37 \\ 29 & 60 - 2 \cdot 29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 37 & 1 \\ 29 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 37 & 1 \\ 29 - 37 & 2 - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 37 & 1 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} = 37 \cdot 1 - (-8) \cdot 1 = 45.$$

135. Исследование системы двух уравнений 1-й степени с двумя неизвестными. 1. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

Для нее можно получить следующую выводную систему (см. п. 72, гл. III):

$$\begin{cases} (a_1 b_2 - a_2 b_1) x = c_1 b_2 - c_2 b_1 \\ (a_1 b_2 - a_2 b_1) y = a_1 c_2 - a_2 c_1 \end{cases}$$

Обозначим: $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Тогда выводная система примет вид:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \end{cases}$$

Напомним, что выводная система удовлетворяется любым решением данной, но она может иметь решения, которых не имеет данная.

Рассмотрим три случая: а) $\Delta \neq 0$; б) $\Delta = 0$, но $\Delta_x \neq 0$ (или $\Delta_y \neq 0$); в) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$.

а) Если $\Delta \neq 0$, то решением выводной системы будет $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$. Будет ли оно решением данной системы? Так как выводная система может быть «богаче» решениями, то требуется проверить, удовлетворяют ли найденные значения x и y данной системе. Сделаем проверку только для первого уравнения системы. Получим:

$$a_1 x + b_1 y = a_1 \cdot \frac{\Delta_x}{\Delta} + b_1 \cdot \frac{\Delta_y}{\Delta} =$$

$$= \frac{a_1 (c_1 b_2 - c_2 b_1) + b_1 (a_1 c_2 - a_2 c_1)}{\Delta} =$$

$$= \frac{c_1 \ (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{\Delta} = \frac{c_1 \cdot \Delta}{\Delta} = c_1.$$

Итак, при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное решение.

Полученные для решения системы формулы называются *формулами Крамера*. В знаменателях правых частей этих формул находится один и тот же определитель. Он составлен из коэффициентов при неизвестных и называется *определителем системы*. В числителях находятся определители, получаемые из определителя системы по следующему правилу: нужно в определителе системы заменить коэффициенты при определяемом неизвестном соответствующими свободными членами.

б) Если $\Delta = 0$, а $\Delta_x \neq 0$, то выводная система не имеет решения. Действительно, левая часть первого уравнения этой системы равна нулю при любом x, а правая не равна нулю. Но тогда и данная система не имеет решения, так как если бы она его имела, то это решение было бы и решением выводной системы.

Замечание. Если $\Delta = 0$, а $\Delta_x \neq 0$, то и $\Delta_y \neq 0$. Это следует из свойств 3 и 4 определителей.

в) Пусть $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, но какой-нибудь из коэффициентов при неизвестных, например a_1, не равен нулю. Тогда, положив $\frac{a_2}{a_1} = k$ и пользуясь тем свойством, что у определителя, равного нулю, соответствующие элементы строк пропорциональны, получим; $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$, $c_2 = kc_1$. Следовательно, второе уравнение данной системы примет вид $ka_1 x + kb_1 y = kc_1$, т. е. будет следствием первого. Поэтому всякое решение первого уравнения будет решением системы. А одно уравнение с двумя неизвестными (при $a_1 \neq 0$) имеет бесконечное множество решений.

Если же все коэффициенты при неизвестных равны нулю, т. е. $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$, то при $c_1 \neq 0$ (или $c_2 \neq 0$) система не имеет решения, а при $c_1 = c_2 = 0$ — удовлетворяется любыми x и y.

2. Графиком уравнения $Ax + By + C = 0$ является прямая линия (п. 127, гл. 3). Поэтому результаты исследования системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными могут быть геометрически проиллюстрированы так: прямые $a_1 x + b_1 y = c_1$ и $a_2 x + b_2 y = c_2$ пересекаются, если $\Delta \neq 0$, параллельны, если $\Delta = 0$, но $\Delta_x \neq 0$, и совпадают, если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$. В последнем случае предполагается, что хотя бы один из коэффициентов при неизвестных не равен нулю.

Пример. Решить систему уравнений: $2x - y = 3$, $3x + 2y = 8$.

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 14$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 7$; $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1$.

Глава четвертая

ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Введение

1. Геометрические фигуры. *Геометрическим телом* называется часть пространства, ограниченная со всех сторон. Общая часть двух смежных областей пространства называется *поверхностью*. Общая часть двух смежных областей поверхности называется *линией*. Часть линии отделяется от смежной части *точкой*.

Любая совокупность точек, линий, поверхностей и тел называется *геометрической фигурой*.

Две фигуры называются *равными*, если их можно совместить одну с другой так, чтобы они совпали во всех своих частях.

2. Плоскость и прямая линия. Простейшей поверхностью является *плоскость*. Простейшей линией — *прямая линия*. Через две точки можно провести только одну прямую. Две прямые могут пересечься только в одной точке. Две прямые, имеющие две общие точки, сливаются и во всех остальных точках. Прямая, имеющая две общие точки с плоскостью, целиком лежит в этой плоскости.

Прямая мыслится *неограниченной*. Часть прямой, ограниченная с одной стороны точкой, называется *лучом* или *полупрямой*. Часть прямой, ограниченная с двух сторон точками, называется *отрезком*.

3. Планиметрия и стереометрия. Геометрия изучает свойства геометрических фигур. Та часть ее, которая изучает фигуры, расположенные на одной плоскости, называется *планиметрией*. Часть геометрии, изучающая свойства фигур, расположенных не в одной плоскости, называется *стереометрией*.

4. Математические предложения. Результаты изучений в геометрии формулируются в виде *предложений*. Эти предложения следующие.

Аксиома — истина, принимаемая без доказательства. *Теорема* — истина, справедливость которой обнаруживается путем некоторого рассуждения, называемого *доказательством*. В каждой теореме есть *условие*, т. е. то, что предполагается данным, и *заключение*, т. е. то, что требуется доказать.

Непосредственный вывод из аксиомы или теоремы называется *следствием*. Подготовительное предложение, вводимое для облегчения доказательства последующего предложения, называется *леммой*.

Теорема называется *обратной* данной теореме, если ее условие и заключение являются соответственно заключением и условием (или частью их) данной теоремы.

Теорема называется *противоположной* данной теореме, если ее условие и заключение являются отрицанием условия и заключения данной теоремы.

Предложение, в котором разъясняется смысл названия или выражения, называется *определением*.

ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 2. Действия с отрезками

5. Равенство и неравенство. 1. Два отрезка *равны* (см. гл. IV, п. 1), если они могут быть наложены один на другой таким образом, что концы их совпадут.

2. Если на данном отрезке взять две точки, из которых хотя бы одна не совпадает с концом данного отрезка, то отрезок, ограниченный этими точками, называется *частью* данного *отрезка*.

3. Если один отрезок равен части второго, то про них говорят, что первый *меньше* второго, а второй *больше* первого.

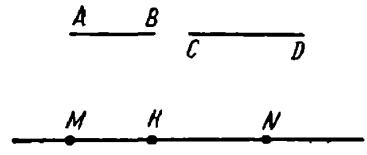

Рис. 21.

6. Сложение и вычитание. 1. *Суммой* двух отрезков AB и CD называется отрезок MN (рис. 21), полученный следующим образом: на какой-нибудь прямой от произвольной ее точки M *откладывают* последовательно отрезки $MK = AB$ и $KN = CD$. Аналогично строится сумма любого

числа отрезков (*слагаемых*). Сумма отрезков обладает переместительным и сочетательным свойствами.

Действие, посредством которого находится сумма отрезков, называется *сложением*.

2. *Разностью* двух отрезков называется отрезок, который, будучи сложен со вторым, даст первый. Действие, посредством которого находится разность двух отрезков, называется *вычитанием*.

7. Умножение и деление. 1. *Умножить* отрезок на целое положительное число n — значит найти сумму n таких отрезков. Про данный отрезок говорят, что он *содержится* n раз в полученном. Результат умножения называется *произведением*.

При умножении какого-нибудь отрезка на достаточно большое число можно получить отрезок, больший любого данного отрезка (*аксиома Архимеда*).

2. *Разделить* данный отрезок на целое положительное число n — значит найти такой отрезок, который после умножения его на n даст данный отрезок.

3. *Умножить* отрезок на положительную рациональную дробь $\frac{m}{n}$ — значит разделить этот отрезок на n и полученный результат умножить на m.

8. Соизмеримые и несоизмеримые отрезки. *Общей мерой* двух отрезков называется отрезок, который содержится в каждом из данных целое число раз (без остатка).

Не всякие два отрезка имеют общую меру, например сторона и диагональ квадрата ее не имеют. Однако если у отрезков есть общая мера, то у них есть и бесчисленное множество общих мер, а также и наибольшая общая мера. Обычно (но не всегда) под общей мерой подразумевают наибольшую.

Два отрезка, имеющие общую меру, называются *соизмеримыми*, а не имеющие ее — *несоизмеримыми*.

9. Длина отрезка. 1. *Измерить отрезок*, соизмеримый с некоторым отрезком, принятым за *единицу длины*, — значит узнать, сколько раз в нем содержится эта единица или какая-нибудь часть (доля) ее. Число, которое получится в результате измерения, называется *длиной отрезка*, Таким образом, *длиной отрезка*, соизмеримого с единицей длины, *называется число, на которое нужно умножить единицу длины, чтобы получить данный отрезок*. Это число будет *рациональным*.

2. Если отрезок несоизмерим с единицей длины, то поступают так. От начальной точки данного отрезка откладывают на нем последовательно отрезок, равный единице длины, такое целое число a_1 раз, чтобы разность (*остаток*) между данным отрезком и произведением единицы длины на a_1 была меньше единицы длины. Затем на остатке откладывают $\frac{1}{10}$ единицы длины такое целое число a_2 раз, чтобы разность между данным отрезком и произведением единицы длины на десятичную дробь a_1, a_2 была меньше $\frac{1}{10}$ единицы длины. Дальше на новом остатке откладывают $\frac{1}{100}$ единицы длины такое число a_3 раз, чтобы разность между данным отрезком и произведением единицы длины на десятичную дробь a_1, a_2a_3 была меньше $\frac{1}{100}$ единицы длины. Теоретически этот процесс никогда не закончится, так как отрезок несоизмерим с единицей. Получится бесконечная десятичная дробь, для вычисления любого десятичного знака которой указано правило. Она не может быть периодической, потому что в противном случае ее можно было бы привести к простой дроби и данный отрезок оказался бы соизмеримым с единицей. Построенная бесконечная дробь и называется *длиной* данного *отрезка, несоизмеримого с единицей*. Это число иррациональное (см. гл. III, п. 37). Числа a_1; a_1, a_2; a_1, a_2a_3; $a_1a_2a_3a_4$; и т. д. называются *приближенными значениями длины отрезка с точностью до* 1; 0,1; 0,01; 0,001 и т. д.

Этот способ получения длины отрезка и ее приближенных значений применим и для отрезков, соизмеримых с единицей длины.

10. Отношение отрезков. 1. *Отношением* двух отрезков называется отношение их длин, измеренных с помощью одной и той же единицы длины. Если отрезки AB и CD имеют длины m и n, это записывают так: $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$. В частности, *отношение отрезка к единице длины численно равно длине отрезка.*

2. Равенство двух отношений называется *пропорцией*. Так как отношение и пропорция для отрезков сводятся к отношению и пропорции чисел, то все названия и дей-

ствия, относящиеся к ним, остаются теми же, что и в арифметике (см. гл. II, § 10).

Две пары отрезков называются *пропорциональными*, если отношение отрезков одной пары равно отношению соответствующих отрезков другой пары.

Отрезок a называется средним пропорциональным отрезков b и c, если $\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$.

§ 3. Окружность как геометрическое место точек. Действия с дугами

11. Геометрическое место. 1. *Геометрическим местом точек*, обладающих некоторым свойством, называется совокупность всех точек, обладающих этим свойством.

2. *Окружностью* называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки этой плоскости. Эта точка называется *центром*. Отрезок прямой линии, соединяющий центр с какой-нибудь точкой окружности, называется *радиусом*. Окружности, имеющие одинаковые радиусы, равны. Отрезок прямой, соединяющий две точки окружности, называется *хордой*. Хорда, проходящая через центр, называется *диаметром*. Диаметр есть наибольшая из хорд. Прямая, проходящая через две точки окружности, называется *секущей*. Прямая, имеющая только одну общую точку с окружностью и лежащая в плоскости окружности, называется *касательной*. Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется *кругом*. Часть окружности называется *дугой*. Часть круга, заключенная между двумя радиусами, называется *сектором*. Часть круга, отсекаемая от него секущей, называется *сегментом*.

12. Действия с дугами. 1. Дуги одной и той же окружности (или равных окружностей) *равны*, если они могут быть наложены одна на другую таким образом, что концы их совпадут.

2. Понятия: меньше, больше, сумма, разность, умножение и деление на целое положительное число для дуг одной и той же окружности или равных окружностей — строятся так же, как соответствующие понятия для отрезков (см. гл. IV, § 2).

3. *Дуговым градусом* называется $\frac{1}{360}$ часть окружности.

§ 4. Углы и параллельные прямые

13. Угол есть фигура, образованная двумя полупрямыми, исходящими из одной точки. Полупрямые, образующие угол, называются *сторонами угла*, а точка, из которой они исходят, — его *вершиной*.

Если стороны угла составляют прямую линию, то он называется *развернутым*.

14. Действия с углами.[1] Два угла называются *равными*, если при наложении они могут быть совмещены.

2. Если вершину и сторону одного угла совместить с вершиной и стороной второго, а другие стороны этих углов разместить по одну сторону от совмещенной и если при этом вторая сторона первого угла окажется внутри второго угла, то говорят, что первый угол *меньше* второго, а второй *больше* первого.

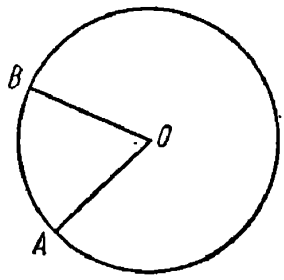

Рис. 22.

3. Если вершину и сторону одного угла совместить с вершиной и стороной второго, а другие стороны этих углов разместить по разные стороны от совмещенной, то они образуют угол, который называется *суммой* данных углов.

Если имеется больше двух углов, то, получив сперва сумму двух, затем сумму найденного угла и третьего данного и т. д., найдем сумму этих углов.

При этом может случиться, что совпадет первая сторона первого угла со второй стороной последнего. Тогда получится угол, который называется *полным*.

Сумма углов обладает переместительным и сочетательным свойствами.

4. *Разность углов, умножение и деление угла* на целое положительное число определяются аналогично соответствующим понятиям для отрезков (см. гл. IV, § 2).

5. Половина полного угла является *развернутым углом*. Половина развернутого называется *прямым углом*. Все прямые углы равны между собой. Угол, больший прямого, но меньший развернутого, называется *тупым*, а меньший прямого — *острым*.

6. Полупрямая, исходящая из вершины угла и делящая угол пополам, называется его *биссектрисой*. Биссектриса

есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла.

15. Центральный угол. Угол AOB (рис. 22), образованный двумя радиусами, называется *центральным углом*. Про него говорят, что он опирается на дугу AB. В одном и том же круге или в равных кругах равным центральным углам соответствуют равные дуги, на которые они опираются, и, обратно, равным дугам соответствуют равные центральные углы.

За единицу измерения углов в *градусной системе* принимается центральный угол, опирающийся на дугу в один

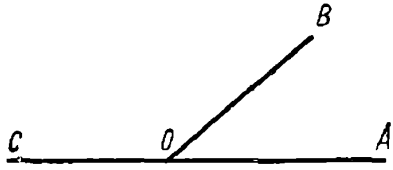

Рис. 23.

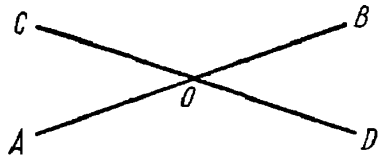

Рис. 24.

дуговой градус. Эта единица называется *угловым градусом*. Существует еще *радианная система* измерения углов (см. гл. V, п. 2). Градус подразделяется на 60 равных частей, которые называются *минутами*. Минута подразделяется на 60 равных частей, которые называются *секундами*. Прямой угол содержит 90°.

Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается, т. е. содержит столько угловых градусов, сколько в соответствующей дуге дуговых градусов.

16. Смежные и вертикальные углы. а) *Смежными углами* называются два угла, если одна сторона у них общая, а две другие составляют продолжение одна другой (рис. 23). Сумма смежных углов равна двум прямым углам.

б) *Вертикальными углами* называются два угла, если стороны одного являются продолжением сторон другого (рис. 24). Вертикальные углы равны между собой.

17. Перпендикуляр и наклонная. Проекция точки и отрезка на прямую. 1. Общая сторона двух неравных смежных углов называется *наклонной* к прямой, на которой лежат две другие стороны. Их общая вершина называется *основанием наклонной*. Общая сторона двух равных смежных углов называется *перпендикуляром* к прямой, на которой лежат две другие стороны. Их общая вершина на-

зывается *основанием перпендикуляра*. Две прямые, пересекающиеся под прямым углом, называются *перпендикулярными*. Если перпендикуляр к прямой проводится из точки этой прямой, то говорят, что он *восставлен* к прямой, если же он проводится к прямой из точки, лежащей вне прямой, то говорят, что он *опущен* на прямую.

Через всякую точку плоскости можно провести перпендикуляр к данной прямой, и притом только один. Перпендикуляр, восставленный к отрезку прямой из его середины, есть геометрическое место точек, равноудаленных от концов этого отрезка.

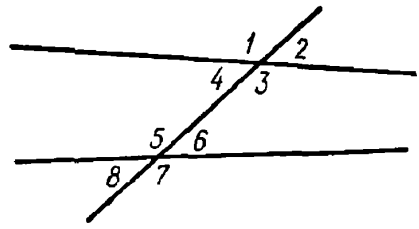

Рис. 25.

2. *Расстоянием от точки до прямой* называется длина отрезка перпендикуляра, опущенного из данной точки на эту прямую, ограниченного этой точкой и основанием перпендикуляра. Если из некоторой точки проведены к прямой перпендикуляр и наклонные, то: а) перпендикуляр короче всякой наклонной; б) наклонные равны, если их основания одинаково удалены от основания перпендикуляра; в) одна наклонная больше другой, если основание первой отстоит дальше от основания перпендикуляра, чем основание второй. Справедливы и обратные теоремы.

Здесь под словами «перпендикуляр» и «наклонные» понимаются их отрезки, заключенные между данной точкой и их основаниями.

3. *Проекцией точки* на прямую называется основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на эту прямую. *Проекцией отрезка прямой* на прямую называется отрезок, ограниченный проекциями концов данного отрезка на эту прямую.

18. Параллельные прямые. 1. Две прямые называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не имеют общей точки.

Через всякую точку вне прямой можно провести только одну прямую, параллельную этой прямой.

Два перпендикуляра к одной и той же прямой параллельны между собой.

2. Если две прямые пересечены третьей, то при этом образуется 8 углов (рис. 25.), которые называются так:

а) *накрест лежащие*: *3* и *5*, 4 и *6* (*внутренние*); 1 и *7*, *2* и *8* (*внешние*).

б) *соответственные*: *2* и *6*, *3* и *7*, *1* и *5*, *4* и *8*;

в) *односторонние*: *3* и *6*, *4* и *5* (*внутренние*); *2* и *7*, *1* и *8* (*внешние*).

Если при пересечении двух прямых третьей окажется, что какие-нибудь соответственные углы равны, или какие-нибудь накрест лежащие углы равны, или сумма каких-нибудь двух односторонних равна 180°, то эти две прямые параллельны. Справедлива и обратная этой теорема.

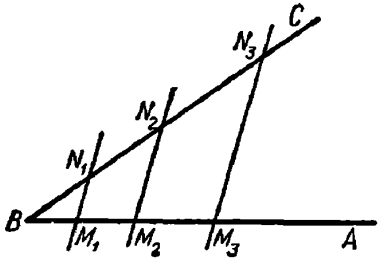

Рис. 26.

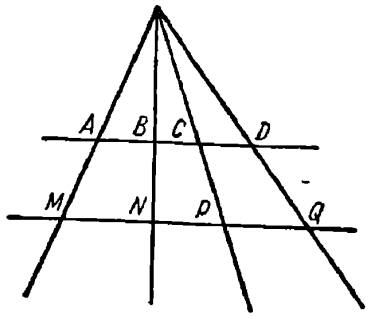

Рис. 27.

3. Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя другими параллельными прямыми, равны. В частности, отрезки перпендикуляров к двум параллельным прямым, заключенные между этими прямыми, равны. Общая длина их называется *расстоянием между параллельными прямыми*.

4. Углы с соответственно параллельными сторонами или равны, или в сумме составляют 180°. Последнее имеет место в том случае, когда один угол острый, а другой тупой. Углы с соответственно перпендикулярными сторонами или равны, или в сумме составляют 180°.

5. Стороны угла, пересекаемые рядом параллельных прямых, рассекаются ими на пропорциональные части, т. е. (рис. 26) $\frac{BM_1}{BN_1} = \frac{M_1M_2}{N_1N_2} = \frac{M_2M_3}{N_2N_3} = \ldots$

В частности, если отрезки BM_1, M_1M_2, M_2M_3 ,... равны между собой, то и отрезки BN_1, N_1N_2, N_2N_3 ,... также равны между собой.

6. Две параллельные прямые, пересекаемые рядом прямых, исходящих из одной точки, рассекаются на пропорциональные части, т. е. (рис. 27) $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CD}{PQ} = \ldots$

§ 5. Треугольники и многоугольники

19. Ломаная линия и многоугольник. 1. *Ломаной линией* называется последовательность отрезков прямых, не лежащих на одной прямой и расположенных так, что начало следующего совпадает с концом предыдущего, за исключением, быть может, конца последнего и начала первого. Если же конец последнего отрезка совпадает с началом первого, то ломаная называется *замкнутой*. Отрезки, образующие ломаную, называются ее *сторонами*, а вершины углов, заключенные между соседними сторонами, называются *вершинами* ломаной. Сумма всех сторон ломаной называется ее *периметром*. Ломаная линия называется *выпуклой*, если она расположена по одну сторону от каждого отрезка, являющегося ее стороной, продолженной неограниченно в обе стороны. Прямолинейный отрезок меньше периметра ломаной, имеющей с этим отрезком общие концы.

Периметр выпуклой ломаной меньше периметра любой ломаной, *объемлющей* данную и имеющей с ней общие концы.

При этом *объемлющей* называется та ломаная, которая вместе с отрезком прямой, соединяющим ее концы, образует фигуру, внутри которой лежит данная ломаная линия.

2. Фигура, образованная замкнутой ломаной линией, а также часть плоскости, ограниченная этой линией, называется *многоугольником*. Стороны и вершины этой ломаной линии называются *сторонами* и *вершинами* многоугольника, сама ломаная называется *контуром* многоугольника, а ее периметр — *периметром* многоугольника.

Многоугольник называется *выпуклым*, если его контур есть выпуклая ломаная линия. *Диагональю* многоугольника называется отрезок прямой, соединяющий две не последовательные вершины многоугольника.

Периметр выпуклого многоугольника меньше периметра всякого многоугольника, *объемлющего* данный.

При этом *объемлющим* называется тот многоугольник, внутри которого лежит данный.

Многоугольник, имеющий три, четыре, пять и т. д. сторон, называется соответственно *треугольником*, *четырехугольником*, *пятиугольником* и т. д.

3. *Внешним углом* выпуклого многоугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого многоугольника.

В отличие от внешних углов углы самого многоугольника называются *внутренними*.

Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника, имеющего n сторон, равна $180° (n - 2)$, а сумма его внешних углов равна 360°.

20. Площадь. Величина части плоскости, заключенной внутри многоугольника или другой плоской замкнутой фигуры, называется *площадью* этой фигуры. Площади приводят в соответствие некоторое число, измеряющее ее. При этом требуют, чтобы равным фигурам соответствовали и равные числа, измеряющие их площади, и чтобы число, измеряющее площадь фигуры, состоящей из нескольких частей, равнялось сумме чисел, измеряющих площади всех этих частей.

Иногда число, измеряющее площадь, также называют площадью. Фигуры, имеющие равные площади, называются *равновеликими*.

При измерении площадей за единицу измерения принимают квадрат (гл. IV, п. 27), сторона которого равна единице.

21. Общие сведения о треугольниках. Треугольник с тремя равными сторонами называется *равносторонним*, с двумя равными сторонами — *равнобедренным*. Если в треугольнике все стороны различной длины, то он называется *разносторонним*. Треугольник, имеющий прямой угол, называется *прямоугольным*, имеющий тупой угол — *тупоугольным*, имеющий только острые углы — *остроугольным*.

Тупоугольные и остроугольные треугольники называются также *косоугольными*.

Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*, а две другие его стороны — *катетами*.

Во всяком треугольнике: а) против равных сторон лежат равные углы; б) против равных углов лежат равные стороны; в) против большей стороны лежит больший угол; г) против большего угла лежит бо́льшая сторона.

Сумма двух сторон треугольника больше третьей, а разность — меньше третьей.

Сумма *внутренних углов* треугольника равна 180°, а *внешний угол* треугольника равен сумме внутренних, с ним не смежных.

22. Равные и неравные треугольники. 1. Два треугольника *равны*, если у них соответственно равны: а) две стороны и угол, заключенный между ними, или б) два угла и прилежащая к ним сторона, или в) три стороны.

Кроме того, два прямоугольных треугольника равны, если гипотенуза и катет одного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого.

2. Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого, а углы, заключенные между ними, не равны, то против большего угла лежит и бóльшая сторона.

Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого, а третьи стороны не равны между собой, то углы, противолежащие третьим сторонам, также не равны и против большей стороны лежит больший угол.

3. В равных треугольниках: а) против равных сторон лежат равные углы; б) против равных углов лежат равные стороны; в) против большей стороны лежит больший угол; г) против большего угла лежит бóльшая сторона.

23. Некоторые линии и точки в треугольнике. 1. Отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на противолежащую сторону (*основание*) или ее продолжение, заключенный между этой вершиной и стороной (или ее продолжением), называется *высотой треугольника*. Отрезок прямой, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной этой вершине стороны, называется *медианой*. Отрезок биссектрисы угла треугольника, заключенный между вершиной треугольника и противолежащей стороной, называется *биссектрисой треугольника*.

Во всяком треугольнике биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Биссектриса внешнего угла треугольника пересекает продолжение противоположной стороны треугольника в точке, расстояния от которой до концов этой стороны пропорциональны прилежащим сторонам треугольника.

Эта теорема не верна для внешнего угла при вершине любого равнобедренного треугольника.

В равнобедренном треугольнике биссектриса угла, заключенного между равными сторонами, является одновременно высотой, медианой и *осью симметрии* треугольника.

Осью симметрии фигуры называется прямая или часть прямой, обладающая тем свойством, что для каждой точки фигуры найдется другая точка той же фигуры, которая будет *симметрична* с первой относительно этой прямой (оси). При этом две точки называются *симметричными* относительно прямой, если они лежат на одном перпендикуляре к этой прямой и находятся на равных расстояниях от нее (по разные стороны).

2. Во всяком треугольнике пересекаются в одной точке:

а) три высоты треугольника (или их продолжения). Точка пересечения их называется *ортоцентром*;

б) три медианы треугольника. Эта точка является *центром тяжести* однородного треугольника. Она делит каждую медиану в отношении 1 : 2, считая от основания;

в) три перпендикуляра, восставленные к сторонам треугольника в их серединах. Эта точка является *центром круга, описанного около треугольника* (см. гл. IV, п. 29);

г) три биссектрисы треугольника. Эта точка является *центром вписанного в треугольник круга* (см. гл. IV, п. 29).

Эти четыре точки называются *замечательными точками* в треугольнике. Первые три из них лежат на одной прямой.

3. Если обозначить стороны треугольника a, b и c, периметр $2p$, высоту, медиану и биссектрису, проведенные к стороне a, соответственно h_a, m_a, β_a, радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно R и r и площадь треугольника S, то справедливы следующие формулы:

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} = \frac{2S}{a}; \quad m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2+a^2};$$

$$\beta_a = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}; \quad R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{abc}{4S};$$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \frac{S}{p}.$$

4. Отрезок прямой, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется *средней линией треугольника*. Она параллельна третьей стороне треугольника и равна ее половине.

24. Подобные треугольники. 1. Два треугольника называются *подобными*, если углы одного соответственно равны углам другого, а *сходственные стороны* пропорциональны. При этом сходственными сторонами треугольников называются такие их стороны, которые прилежат к равным углам (или лежат против равных углов). Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие стороны этого треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.

2. Два треугольника подобны, если: а) два угла одного треугольника равны двум углам другого, или б) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, заключенные между этими сторонами, равны, или в) три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого.

Два треугольника подобны, если стороны одного соответственно параллельны или перпендикулярны сторонам другого.

Два прямоугольных треугольника подобны, если гипотенуза и катет одного пропорциональны гипотенузе и катету другого.

Отношение сходственных сторон подобных треугольников называется *коэффициентом подобия* этих треугольников.

3. Высоты подобных треугольников, проведенные к сходственным сторонам, называются *сходственными высотами*. Аналогично определяются *сходственные медианы* и *сходственные биссектрисы*.

В подобных треугольниках отношение сходственных сторон равно отношению их: а) периметров; б) сходственных высот; в) сходственных медиан; г) сходственных биссектрис; д) радиусов описанных около треугольников окружностей; е) радиусов вписанных в треугольники окружностей. Площади подобных треугольников относятся как квадраты их сходственных сторон.

25. Метрические соотношения в треугольнике. 1. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная из вершины прямого угла, есть средняя пропорциональная величина между двумя отрезками, на которые она рас-

секает гипотенузу, а каждый катет есть средняя пропорциональная между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.

2. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (*теорема Пифагора*).

Во всяком треугольнике: а) квадрат стороны, лежащей против острого угла, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения одной из этих сторон и проекции на нее другой стороны; б) квадрат стороны, лежащей против тупого угла, равен сумме квадратов двух других сторон, сложенной с удвоенным произведением одной из этих сторон и проекции на нее другой стороны.

Справедливы и теоремы, обратные этим трем.

26. Площадь треугольника. $S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2} =$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R} = pr.$$

Обозначения: a, b, c — стороны треугольника; h_a, h_b, h_c — соответствующие этим сторонам высоты; $2p$ — периметр; R — радиус описанной около треугольника окружности; r — радиус вписанной в треугольник окружности; S — площадь треугольника.

Треугольники с равными основаниями и равными высотами равновелики.

Отношение площадей треугольников, имеющих по равному углу, равно отношению произведений сторон треугольников, заключающих эти углы.

27. Параллелограммы и трапеции. 1. *Параллелограммом* называется четырехугольник, стороны которого попарно параллельны.

Во всяком параллелограмме: а) противоположные стороны равны; б) противоположные углы равны: в) сумма углов, прилежащих к любой стороне, равна 180°; г) диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам; д) точка пересечения диагоналей является *центром симметрии* параллелограмма.

Центром симметрии фигуры называется точка, обладающая тем свойством, что для каждой точки фигуры найдется другая точка той же фигуры, которая будет *симметрична* с первой относительно этой точки.

При этом две точки называются симметричными относительно третьей точки, если они лежат на одной прямой, проходящей через третью точку, и находятся на равных расстояниях от нее (по разные стороны).

Четырехугольник является параллелограммом, если: а) противоположные стороны попарно равны, или б) две противоположные стороны равны и параллельны, или в) диагонали в точке пересечения делятся пополам, или г) противоположные углы попарно равны.

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту ($S = ah_a$).

2. Четырехугольник, у которого все углы равны между собой (и равны прямому углу), называется *прямоугольником*. Прямоугольник есть параллелограмм.

Во всяком прямоугольнике: а) диагонали равны; б) прямые, проходящие через точку пересечения диагоналей параллельно его сторонам, являются осями симметрии прямоугольника; в) точка пересечения диагоналей есть центр описанной около прямоугольника окружности.

Таким образом, вокруг прямоугольника можно описать окружность (см. гл. IV, п. 29).

Всякий параллелограмм с равными диагоналями есть прямоугольник.

3. Четырехугольник, у которого все стороны равны между собой, называется *ромбом*. Ромб есть параллелограмм.

Во всяком ромбе диагонали взаимно перпендикулярны, делят углы ромба пополам, являются осями симметрии ромба, а точка пересечения диагоналей есть центр вписанной в ромб окружности.

Таким образом, в ромб можно вписать окружность (см. гл. IV, п. 29).

Всякий параллелограмм, диагонали которого перпендикулярны, есть ромб.

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей $\left(S = \frac{1}{2} l_1 l_2\right)$.

4. Четырехугольник, у которого все углы равны и все стороны равны, называется *квадратом*. Квадрат одновременно является ромбом и прямоугольником.

5. Четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны, называется *трапецией*. Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями*, а две другие — *боковыми сторонами*.

Если боковые стороны равны, то трапеция называется *равнобочной*. В равнобочной трапеции углы при основании равны, а также равны ее диагонали.

Трапеция называется *прямоугольной*, если один из ее углов прямой.

Отрезок прямой, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется *средней линией трапеции*. Средняя линия параллельна основаниям и равна их полусумме. Расстояние между ее основаниями называется *высотой* трапеции.

Площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту или произведению полусуммы оснований на высоту $\left(S = \frac{a+b}{2} \cdot h\right)$.

28. Подобные многоугольники. 1. Многоугольники называются *одноименными*, если они имеют одинаковое число сторон.

Два одноименных многоугольника называются *подобными*, если углы одного соответственно равны углам другого, а стороны этих многоугольников, заключающие равные углы, пропорциональны. Такие стороны подобных многоугольников называются *сходственными*, а отношение сходственных сторон — *коэффициентом подобия*.

Подобные многоугольники можно разложить на одинаковое число подобных треугольников, одинаково расположенных.

В подобных многоугольниках отношение их периметров равно отношению сходственных сторон, а отношение площадей равно отношению квадратов сходственных сторон.

2. *Правильные* одноименные многоугольники (см. п. 30) подобны. Их стороны относятся как радиусы или апофемы.

29. Вписанные и описанные многоугольники. 1. Многоугольник, все вершины которого лежат на окружности, называется *вписанным* в эту окружность, а окружность называется *описанной* около этого многоугольника. Многоугольник, все стороны которого касаются окружности, называется *описанным* около окружности, а окружность — *вписанной* в этот многоугольник.

2. Около всякого треугольника можно описать окруж-

ность, и притом только одну. Во всякий треугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

3. Если в четырехугольнике суммы противоположных углов равны между собой, то около него можно описать окружность. Обратно, если около четырехугольника можно описать окружность, то суммы противоположных углов равны.

Если в четырехугольнике суммы противоположных сторон равны между собой, то в него можно вписать окружность. Обратно, если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

4. Около правильного многоугольника (см. п. 30) можно описать окружность. В правильный многоугольник можно вписать окружность.

5. Площадь описанного многоугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной в многоугольник окружности ($S = pr$).

30. Правильные многоугольники. 1. *Правильным многоугольником* называется выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны и углы равны.

Если окружность разделить на n равных частей ($n > 2$) и каждые две соседние точки деления соединить отрезками прямых, то получится правильный многоугольник с числом сторон, равным n. Также получится правильный n-угольник, если через полученные точки деления провести касательные к окружности и продолжить каждую из них до взаимного пересечения с касательными в соседних точках деления.

В правильный многоугольник можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Радиус описанной окружности называется *радиусом правильного многоугольника*, радиус вписанной окружности — *апофемой*, а общий центр этих окружностей — *центром* его.

2. Если обозначить через R радиус окружности, а через a_n и b_n стороны правильного вписанного в окружность многоугольника и описанного около нее, то справедливы формулы:

$$a_3 = R\sqrt{3} \approx 1{,}73205\,R; \quad a_4 = R\sqrt{2} \approx 1{,}41421\,R;$$

$$a_5 = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \approx 1{,}17558\,R; \quad a_6 = R;$$

$$a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 0{,}76536\,R;$$

$$a_{10} = R\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}61804\,R;\quad b_n = \frac{2a_n R}{\sqrt{4R^2 - a_n^2}};$$

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_n^2}}.$$

Последняя формула называется *формулой удвоения*.

3. Площадь правильного многоугольника равна произведению его периметра на половину апофемы.

§ 6. Окружность[1]

31. Форма и положение окружности. 1. Через одну точку можно провести сколько угодно окружностей. Центры их можно брать в произвольных точках плоскости.

2. Через две точки можно провести сколько угодно окружностей. Центры их можно брать в произвольных точках перпендикуляра, проведенного к отрезку, ограниченному данными точками, через его середину.

3. Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, и притом только одну.

4. Всякий диаметр является осью симметрии для окружности и круга, а центр — центром симметрии.

Диаметр, перпендикулярный к хорде, делит эту хорду и обе стягиваемые ею дуги пополам. Обратно, диаметр, проведенный через середину хорды, перпендикулярен к ней и делит стягиваемые ею дуги пополам, а проведенный через середину дуги, перпендикулярен к стягивающей ее хорде и делит ее пополам. Дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны.

32. Зависимость между дугами, хордами и расстояниями хорд от центра. В одной и той же окружности или в равных окружностях: а) равным дугам соответствуют равные хорды; б) из двух неравных дуг, меньших полуокружности, большей дуге соответствует и большая хорда; в) равные хорды одинаково удалены от центра; г) из двух неравных хорд бо́льшая менее удалена от центра.

Справедливы и теоремы, обратные этим.

33. Окружность и прямая. 1. Прямая может не иметь общих точек с окружностью, иметь только одну такую точку (касательная) и иметь две общие точки (секущая). В

[1] См. также гл. IV, § 3.

первом случае расстояние от нее до центра окружности больше радиуса, во втором — равно радиусу и в третьем — меньше радиуса.

2. Касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания. Обратно, прямая, перпендикулярная к радиусу окружности в конце его, лежащем на окружности, есть касательная к этой окружности.

Касательная, параллельная хорде, делит точкой касания дугу, стягиваемую этой хордой, пополам.

34. Взаимное расположение двух окружностей. 1. Две окружности могут не иметь общих точек, иметь только одну общую точку (окружности *касаются*), иметь две общие точки (окружности *пересекаются*).

Трех общих точек две несливающиеся окружности иметь не могут.

2. Если две окружности имеют общую точку вне *линии центров* (т. е. вне прямой, проходящей через центры этих окружностей), то они имеют и вторую общую точку, симметричную с первой относительно линии центров.

Отсюда следует, что точки пересечения двух окружностей симметричны относительно линии центров или что общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна к линии центров и делится линией центров пополам.

3. Точка касания двух окружностей находится на их линии центров.

Обратно, две окружности, имеющие общую точку на линии центров, касаются одна другой.

4. Если радиусы окружностей R и r ($R > r$), а расстояние между их центрами d, то: а) окружности лежат одна вне другой (не касаясь) только в том случае, если $d > R + r$; б) окружности имеют *внешнее касание* только в том случае, если $d = R + r$; в) окружности пересекаются только в том случае, если $R - r < d < R + r$; г) окружности имеют *внутреннее касание* только в том случае, если $d = R - r$; д) окружности лежат одна внутри другой (не касаясь) только в том случае, если $d < R - r$.

35. Измерение углов дугами окружности. *Вписанным углом* (рис. 28) называется угол, образованный двумя хордами, исходящими из одной точки окружности. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Отсюда следует, что все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой, а вписанный угол, опирающийся на диаметр, есть прямой. Угол ACB,

составленный двумя хордами, пересекающимися внутри окружности (рис. 29), измеряется $\frac{1}{2}(\smile AB + \smile DE)$, т. е. полусуммой дуг, заключенных между сторонами и продол-

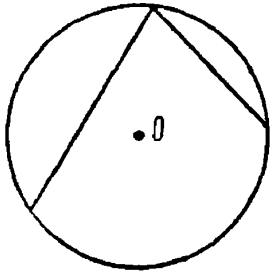

Рис. 28.

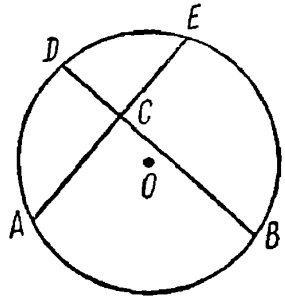

Рис. 29.

жениями сторон. *Описанным углом* (рис. 30) называется угол, образованный двумя касательными к окружности. Он измеряется $\frac{1}{2}(\smile AmB - \smile AnB)$, т. е. полуразностью

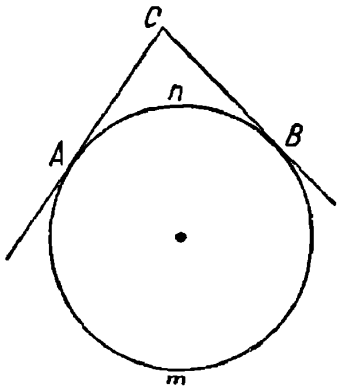

Рис. 30.

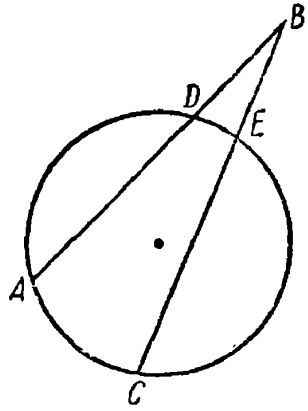

Рис. 31.

дуг, заключенных между его сторонами. Угол, вершина которого лежит вне круга, а стороны пересекаются с окружностью (рис. 31), измеряется $\frac{1}{2}(\smile AC - \smile DE)$, т. е. полуразностью дуг, заключенных между его сторонами.

Угол ABC, образованный касательной и хордой, проведенной из точки касания (рис. 32), измеряется половиной дуги CB, заключенной внутри него.

36. Пропорциональные линии в круге. 1. Перпендикуляр (точнее, отрезок перпендикуляра), опущенный из точки окружности на диаметр, есть средняя пропорциональная величина между отрезками диаметра, на которые этот перпендикуляр делит диаметр.

Хорда есть средняя пропорциональная величина между диаметром, проведенным через конец хорды, и проекцией хорды на этот диаметр.

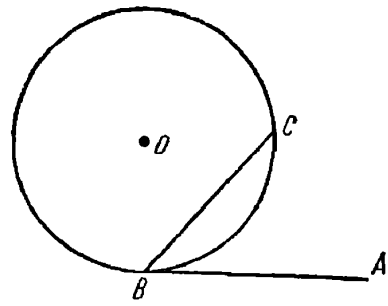

Рис. 32.

2. Если через точку, взятую внутри круга, проведено несколько хорд, то произведение отрезков каждой хорды, на которые ее делит эта точка, есть величина постоянная для всех хорд. Эта постоянная равна $r^2 - a^2$, где a — расстояние данной точки до центра окружности, r — радиус окружности.

3. Если из точки, расположенной вне окружности, проведены к этой окружности касательная и секущая, то произведение отрезков секущей, заключенных между данной точкой и точками пересечения секущей с окружностью, равно квадрату отрезка касательной, заключенного между данной точкой и точкой касания.

Справедлива теорема и обратная этой. Если из точки C (рис. 72) проведены к окружности секущая, имеющая с окружностью точки пересечения A и B, и отрезок CD, где D — точка окружности, и если $CA \cdot CB = CD^2$, то прямая CD есть касательная к этой окружности.

Таким образом, произведение указанных отрезков секущей есть величина постоянная. Эта постоянная равна $a^2 - r^2$, где a — расстояние данной точки до центра окружности, а r — радиус окружности.

37. Радикальная ось. 1. *Степенью точки* относительно окружности называется величина $a^2 - r^2$, где a — расстояние точки до центра окружности, а r — радиус окружности. Очевидно, степень точки есть величина постоянная, причем положительная, отрицательная или равная нулю, если точка, соответственно, лежит вне окружности,

внутри окружности или на окружности. Для точки, лежащей вне окружности, степень точки равна квадрату отрезка касательной, проведенной из этой точки к данной окружности (ограниченного этой точкой и точкой касания.)

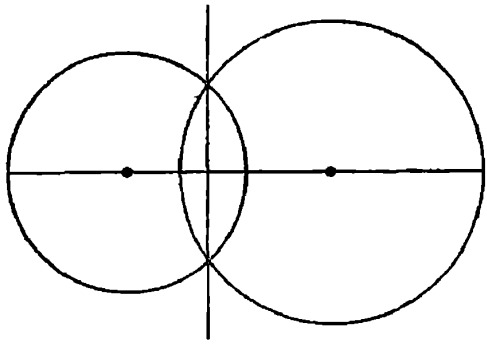

Рис. 33.

2. Геометрическое место точек, имеющих одну и ту же степень относительно двух окружностей, называется *радикальной осью* этих окружностей. Радикальная ось есть прямая, перпендикулярная к линии центров. Ее точка пересечения с линией центров отстоит от середины отрезка, ограниченного центрами данных окружностей, на расстояние $\frac{R^2-r^2}{2d}$, где R и r — радиусы этих окружностей, а d — расстояние между их центрами.

Всякие две окружности, если они не *концентрические* (т. е. их центры не совпадают), имеют радикальную ось.

3. Для построения радикальной оси двух окружностей достаточно найти одну точку, имеющую одинаковую степень относительно данных окружностей, и через нее провести прямую, перпендикулярную к линии центров. Эта прямая и будет радикальной осью. Поэтому радикальной осью пересекающихся окружностей будет прямая, проходящая через точки их пересечения (рис. 33), а касающихся — их общая внутренняя (или единственная при внутреннем касании) касательная (рис. 34 и 35). Для того чтобы построить радикальную ось двух окружностей, не имеющих общих точек, можно поступить так. Пересечь данные окружности вспомогательной окружностью. Найти радикальные оси вспомогательной окружности с каждой

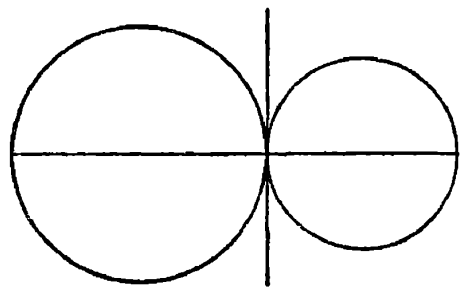

Рис. 34.

из данных. Определив точку пересечения этих осей, опустить из нее перпендикуляр на линию центров данных окружностей. Это и будет искомая радикальная ось (рис. 36 и 37).

При этом вспомогательную окружность нужно выбирать так, чтобы ее центр не находился на линии центров данных окружностей.

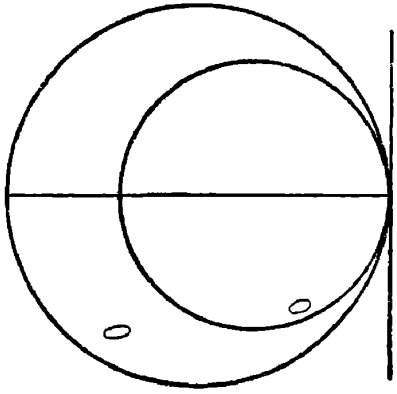

Рис. 35.

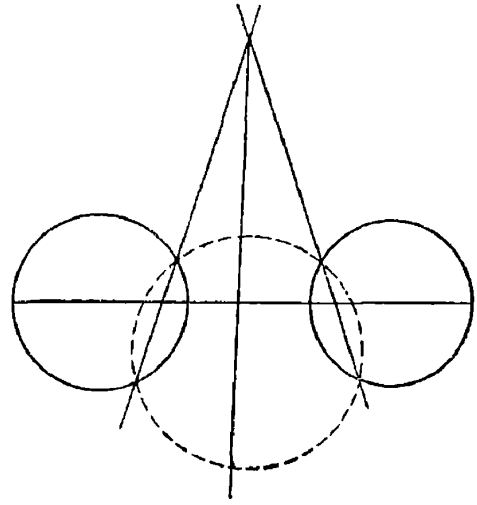

Рис. 36.

4. Если центры трех окружностей не лежат на одной прямой, то радикальные оси этих окружностей, взятых попарно, пересекаются в одной точке, называемой их *радикальным центром*. В частности, три общие хорды трех попарно пересекающихся окружностей пересекаются в одной точке (рис. 38), и три общие касательные трех попарно касающихся окружностей также пересекаются в одной точке (рис. 39).

§ 7. Гомотетичные фигуры

38. Гомотетичные точки. Точка M_1 называется *гомотетичной* точке M относительно точки O (рис. 40), если она лежит на прямой OM и отношение расстояний OM_1 к OM равно данному числу k, т. е. $\frac{OM_1}{OM}=k$. Если точка M_1 лежит с той же стороны от O, что и M, то гомотетия называется *прямой*, если же точки M_1 и M лежат по разные стороны от O, то гомотетия называется *обратной* (рис. 40). Точка

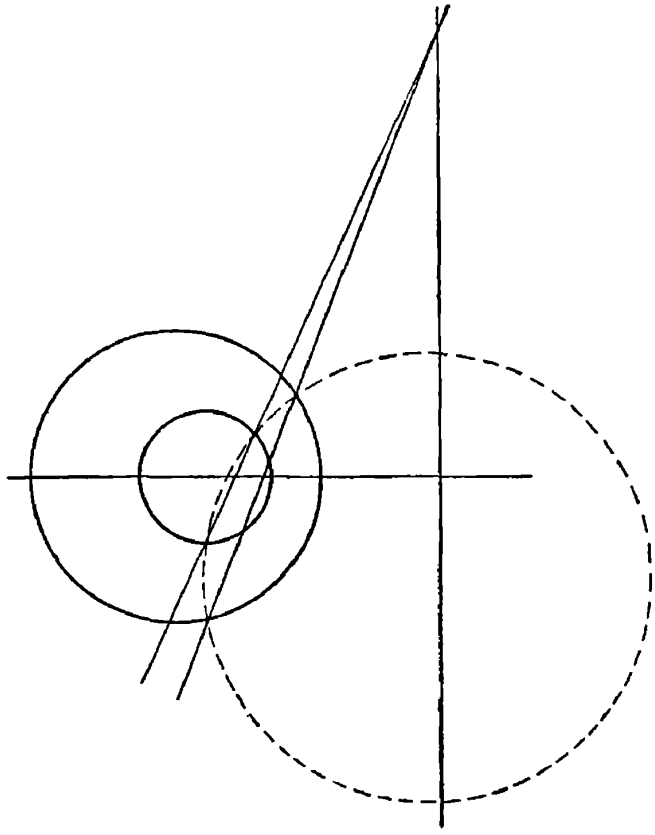

Рис. 37.

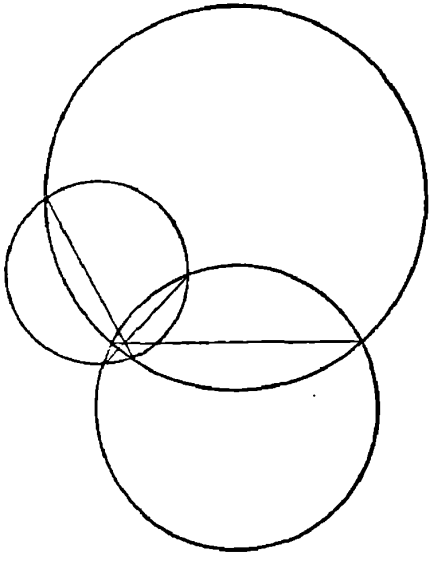

Рис. 38.

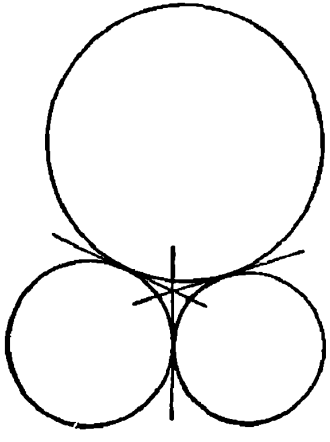

Рис. 39.

O называется *центром гомотетии* (или *центром подобия*), а число k — *коэффициентом гомотетии* (или *коэффициентом подобия*).

39. Гомотетичные фигуры. 1. Если каждой точке одной геометрической фигуры соответствует одна определенная точка второй и, обратно, каждой точке второй фигуры соответствует одна определенная точка первой, то говорят, что между точками этих фигур существует *взаимно однозначное соответствие*.

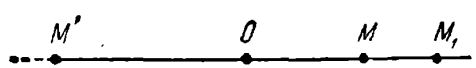

Рис. 40.

Соответственные точки таких фигур называются *сходственными*, отрезки, ограниченные сходственными точками, называются *сходственными отрезками*, а углы, образованные сходственными отрезками, — *сходственными углами*.

2. Две *фигуры называются гомотетичными*, если между точками этих фигур существует такое, взаимно однозначное соответствие, что каждые две соответствующие точки фигур являются гомотетичными относительно одного и того же центра и с одним и тем же коэффициентом гомотетии.

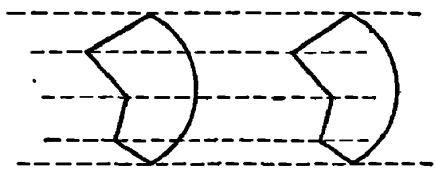
Рис. 41.

Фигуры, симметричные относительно точки, являются гомотетичными с коэффициентом — 1 (обратная гомотетия).

3. В гомотетичных фигурах сходственные отрезки параллельны и их отношение равно коэффициенту гомотетии. Соответствующие отрезки при этом одинаково направлены, если гомотетия прямая, и противоположно направлены, если гомотетия обратная.

Отсюда следует, что в гомотетичных фигурах сходственные углы равны и сходственные отрезки пропорциональны.

4. Если между точками двух фигур существует взаимно однозначное соответствие и если сходственные отрезки этих фигур параллельны, то эти фигуры гомотетичные.

При этом условливаются считать гомотетичными также такие равные фигуры, которые могут быть совмещены одна с другой *параллельным переносом* (рис. 41).

40. Примеры гомотетичных фигур. 1. Фигура, гомотетичная прямой, есть прямая. 2. Фигура, гомотетичная многоугольнику, есть многоугольник, подобный данному (рис. 42). 3. Фигура, гомотетичная окружности, есть окружность. 4. Любые две окружности можно рассматривать как гомотетичные фигуры. Если они равны или концентрические, то это возможно рассматривать одним способом, в прочих случаях двумя (но не более).

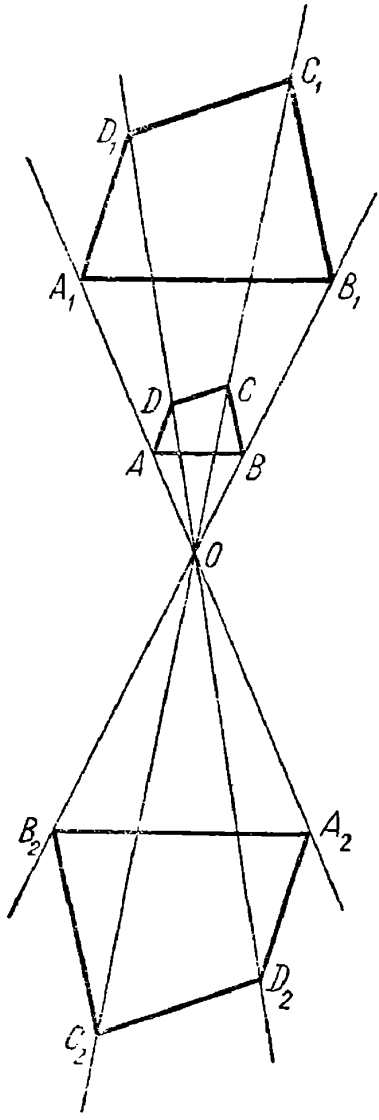

Рис. 42.

Таким образом, для них существуют два центра гомотетии: один соответствующий прямой гомотетии, а другой — обратной. Первый называется *внешним центром гомотетии* двух окружностей, а второй — *внутренним* (O_1 и O_2 на рис. 43). Если окружности имеют общие внешние касательные и эти касательные пересекаются, то точка пересечения находится во внешнем центре гомотетии. Точка пересечения общих внутренних касательных (если они существуют) находится во внутреннем центре гомотетии.

Если окружности касаются, то их общая точка служит одним из центров гомотетии окружностей.

41. Подобные фигуры. 1. Два гомотетичных многоугольника подобны, потому что у них сходственные углы равны и сходственные стороны пропорциональны (рис. 42).

Любые подобные многоугольники можно расположить так, что они станут гомотетичными. Поэтому гомотетичные многоугольники называют также подобными и подобно расположенными.

2. Две геометрические фигуры называются *подобными*, если их можно расположить так, что они станут гомотетичными.

Например, дуги различных окружностей, соответствующих равным центральным углам, подобны.

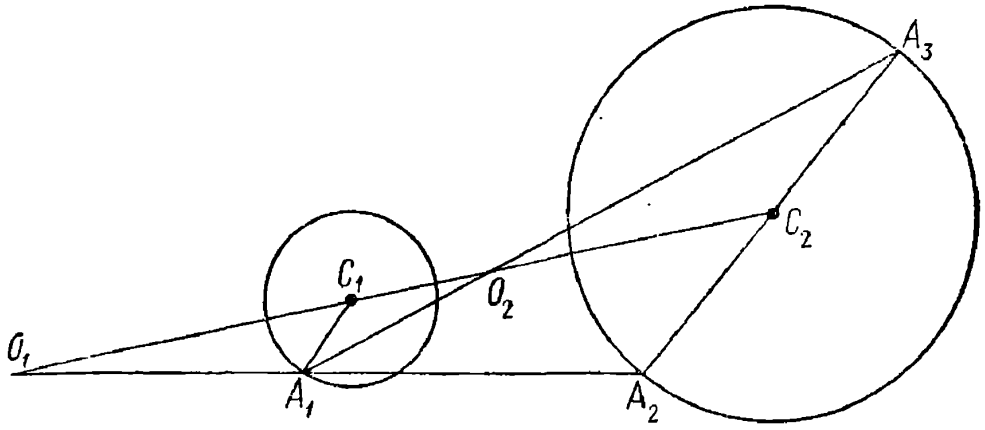

Рис. 43.

В подобных фигурах сходственные углы равны и сходственные отрезки пропорциональны.

3. *Гомотетия есть частный случай подобия.* Гомотетичные фигуры называют также *подобными и подобно расположенными* или *перспективно-подобными*.

§ 8. Длина окружности и площадь круга

42. Определение длины окружности. 1. Так как никакая часть окружности не может быть совмещена с отрезком прямой линии, как бы он мал ни был, то и способы измерения прямолинейных отрезков не могут быть применены для измерения длины окружности. Поэтому необходимо определить, что такое длина окружности.

Длиной окружности называется общий предел периметров вписанных в окружность и описанных около нее правильных одноименных многоугольников, если число их сторон неограниченно увеличивается путем последовательного удвоения. Предварительно, конечно, доказывается, что такой общий предел *существует*.

З а м е ч а н и е. Вместо правильных одноименных многоугольников можно рассматривать любые выпуклые, в предположении, что длины всех сторон этих многоугольников стремятся к нулю.

2. Отношение длины окружности (C) к ее диаметру ($2R$) есть величина постоянная для всех окружностей. Эта постоянная величина обозначается греческой буквой π. Итак, $\pi = \frac{C}{2R}$, $C = 2\pi R$. Число π — иррациональное и даже трансцендентное (см. гл. III, п. 44). $\pi = 3{,}141592653\ldots$

3. Если дуга окружности радиуса R содержит n^0, то ее длина $l = \frac{\pi R n}{180}$.

43. Определение площади круга. 1. *Площадью круга* называется общий предел площадей вписанных в круг и описанных около него правильных одноименных многоугольников, если число их сторон неограниченно увеличивается путем последовательного удвоения. Предварительно, конечно, доказывается, что такой общий предел *существует*. Если радиус круга равен R, то его площадь $S = \pi R^2$.

Замечание. Вместо правильных одноименных многоугольников можно рассматривать любые выпуклые, в предположении, что длины всех сторон этих многоугольников стремятся к нулю.

2. Если дуга сектора круга радиуса R содержит n°, а ее длина l, то площадь сектора $S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{lR}{2}$.

3. Площадь сегмента может быть вычислена как разность площадей соответствующих сектора и треугольника.

§ 9. Простейшие задачи на построение, решаемые с помощью циркуля и линейки

44. Разделить данный отрезок пополам. Из концов A и B (рис. 44) отрезка как из центров проводим дуги равных окружностей настолько большого радиуса, чтобы они пересекались (в точках M и N). Прямая MN пересечет отрезок AB в искомой точке C.

45. Провести перпендикуляр к данному отрезку через его середину. MN будет искомый перпендикуляр к AB (см. п. 44).

46. Через данную точку провести перпендикуляр к данной прямой. 1. Если данная точка C (рис. 45) лежит на данной прямой PQ, то из C как из центра проводим окружность, пересекающую PQ в точках A и B. Дальше поступаем с отрезком AB, как в пп. 45 и 44.

2. Если данная точка C (рис. 46) находится вне прямой PQ, то из C как из центра проводим окружность так, чтобы она пересекла PQ в некоторых точках A и B. Дальше поступаем с отрезком AB, как в пп. 45 и 44.

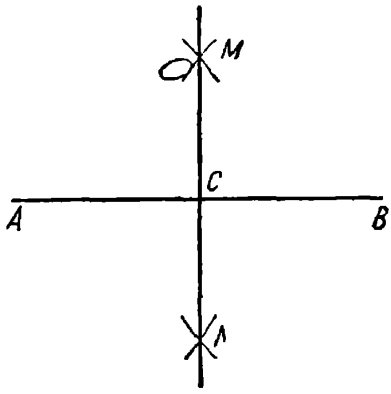

Рис. 44.

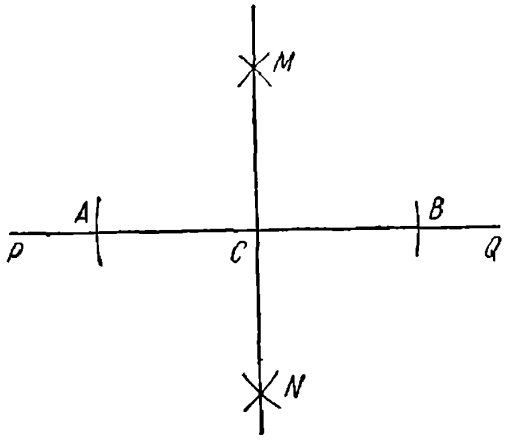

Рис. 45.

47. В конце данного луча, не продолжая его, провести к нему перпендикуляр. Из произвольной точки O (рис. 47), не лежащей на данном луче, как из центра проводим окружность, проходящую через конец A луча и пересекаю-

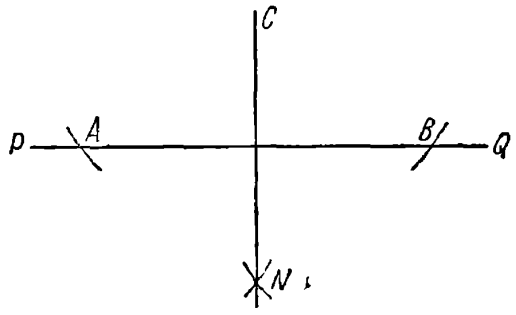

Рис. 46.

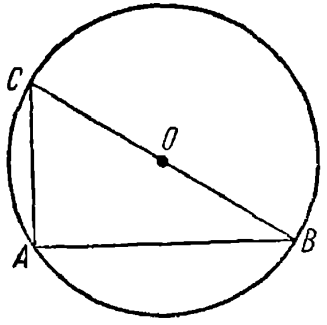

Рис. 47.

щую его еще в точке B. Проведем через B диаметр и второй его конец C соединим с A. Искомый перпендикуляр будет CA.

48. Через данную точку провести прямую, параллельную данной. Из данной точки A (рис. 48) как из центра достаточно большим, но произвольным радиусом описываем

дугу BD окружности, пересекающую данную прямую в точке B. Затем таким же радиусом описываем дугу AC с центром в B, пересекающую данную прямую в точке C. Наконец, радиусом AC из точки B как из центра проводим дугу, пересекающую дугу BD в точке E. Прямая AE будет параллельна CB.

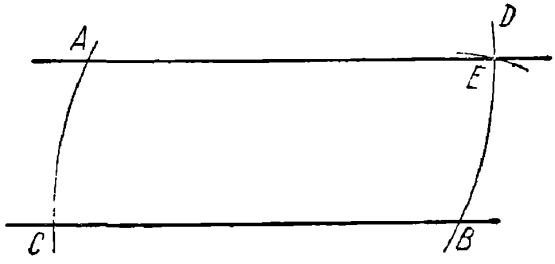

Рис. 48.

49. Разделить данный угол пополам. Отложим на сторонах

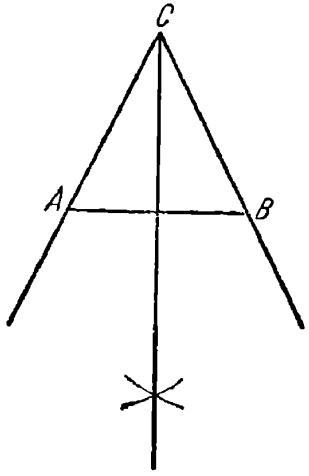

Рис. 49.

угла равные отрезки CA и CB (рис. 49) так, чтобы получился равнобедренный треугольник. Тогда биссектриса угла C будет одновременно являться перпендикуляром к отрезку AB в его середине (см. пп. 45 и 44).

50. Построить треугольник по трем данным сторонам a, b и c. Если отрезок a (рис. 50) наибольший, то задача имеет решение только в том случае, когда $a<b+c$. Для построения треугольника откладываем отрезок $BC = a$ и из точек B и C как из центров проводим окружности радиусов c и b. Соединив точку A пересечения окружностей с точками B и C, получим искомый треугольник.

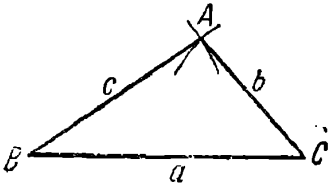

Рис. 50.

51. Построить угол, равный данному, так, чтобы одна его сторона лежала на данной прямой, а вершиной являлась данная точка прямой. На сторонах данного угла от его вершины B (рис. 51) откладываем любые отрезки BA и BC. Затем строим треугольник, равный треугольнику ABC, откладывая на данной прямой от данной точки B_1 отрезок $B_1A_1 = BA$.

52. Построить треугольник по двум данным сторонам и углу между ними. Для этого строим угол, равный данному (п. 51), и откладываем на его сторонах отрезки, равные данным сторонам. Затем соединяем концы последних третьим отрезком.

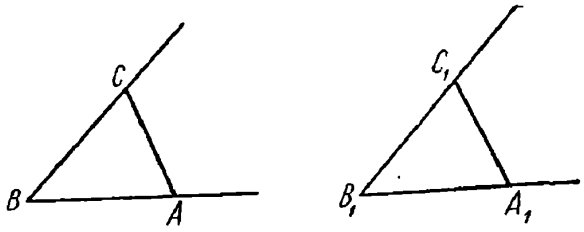

Рис. 51.

53. Построить треугольник по данной стороне и двум прилежащим к ней углам. При концах данного отрезка строим углы, равные данным (п. 51), причем отрезок является их общей стороной. Пересечение двух других сторон даст третью вершину треугольника.

54. Построить прямоугольный треугольник по данным гипотенузе и катету. На данной гипотенузе AB (рис. 52)

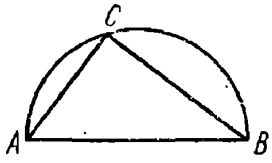

Рис. 52.

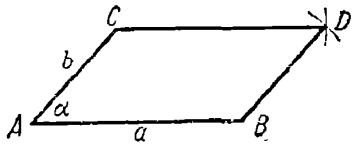

Рис. 53.

как на диаметре описываем полуокружность. Засекаем полуокружность дугой радиуса AC с центром A, где AC равно данному катету. Треугольник ABC будет искомый.

55. Построить параллелограмм по сторонам a и b и углу между ними α. Строим угол A (рис. 53), равный α (п. 51). На сторонах его откладываем отрезки $AB = a$ и $AC = b$. Из точек C и B как из центров описываем дуги радиусов a в первом случае, и b — во втором. Соединив точку D пересечения дуг с точками C и B, получим искомый параллелограмм.

56. Построить прямоугольник по данным сторонам. Так как в этом случае известен угол между сторонами — 90°, то построение такое же, как в п. 55.

57. Разделить отрезок на равные части. Для того чтобы отрезок AB (рис. 54) разделить, например, на 3 равные части, проводим из точки A луч и на нем откладываем $AM = MN = NP$. Затем проводим прямую PB и прямые $ND \parallel PB$ и $MC \parallel PB$. Тогда получим: $AC = CD = DB$. Аналогично поступаем, если AB нужно разделить на n равных частей.

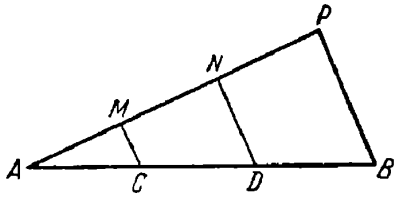

Рис. 54

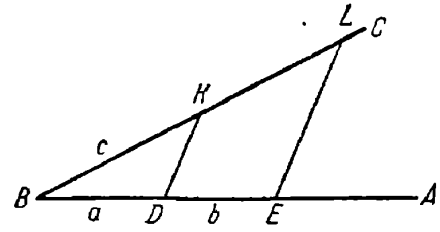

Рис. 55,

58. Разделить отрезок на части, пропорциональные данным отрезкам. Поступаем так же, как в п. 57, только строим отрезки AM, MN, NP, равные данным отрезкам.

59. К трем отрезкам a, b и c построить четвертый пропорциональный. На стороне AB (рис. 55) произвольного угла ABC откладываем отрезки $BD = a$ и $DE = b$ и на стороне BC отрезок $BK = c$. Проводим прямую KD и через точку E прямую EL, параллельную KD (п. 48) до пересечения ее со стороной BC в точке L. Отрезок KL и будет искомый.

Здесь предполагалась пропорция $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, т. е. $x = \frac{bc}{a}$, где x — искомый отрезок. Если этого не предполагать, то задача имеет не единственное решение.

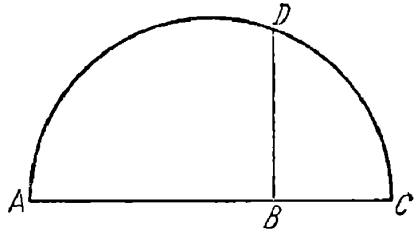

Рис. 56.

60. Построить отрезок средний пропорциональный между двумя данными. Откладываем на некоторой прямой отрезки AB и BC (рис. 56), равные данным. На отрезке AC как на диаметре строим полуокружность и из точки B проводим отрезок $BD \perp AC$ до пересечения его с полуокружностью в точке D. Отрезок BD и есть искомый.

61. Через три данные точки провести окружность. (Точки не лежат на одной прямой.) Пусть данные точки будут A, B и C (рис. 57). Проводим перпендикуляры MO и NO к отрезкам AB и BC в их серединах. Точка O пересечения этих перпендикуляров — центр искомой окружности.

62. Найти центр данной дуги окружности. Выбираем любые три точки A, B и C на данной дуге и дальше поступаем, как в п. 61.

63. Разделить данную дугу пополам. Соединяем концы дуги хордой и к ней проводим перпендикуляр через ее середину (п. 45). Точка пересечения его с данной дугой будет делить ее пополам.

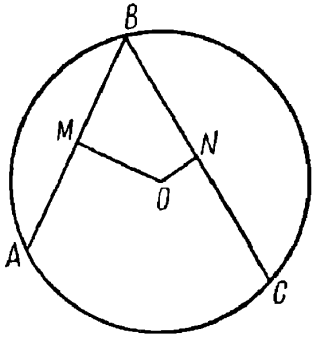

Рис. 57.

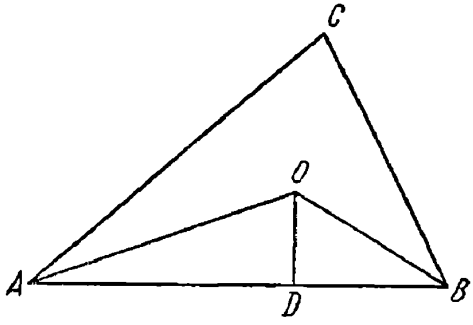

Рис. 58.

64. В данный треугольник вписать окружность. Проводим биссектрисы двух углов треугольника. Точка их пересечения есть центр вписанной окружности. Из центра O (рис. 58) опускаем перпендикуляр OD на сторону AB. Отрезок OD — радиус окружности.

65. На данном отрезке построить сегмент, вмещающий данный угол. Через конец B (рис. 59) данного отрезка AB проводим перпендикуляр BC (п. 47) и на нем как на стороне строим угол CBD, равный данному углу α (п. 51). Затем проводим перпендикуляр EF к отрезку AB через его середину (п. 45). Точка O пересечения прямых BD и EF будет центром дуги сегмента, а ее радиус равен отрезку OB.

66. Провести касательную к данной окружности через данную точку. 1. Если данная точка A (рис. 60) лежит на окружности, то строим прямую $AB \perp OA$ (п. 47). Прямая AB и есть искомая.

2. Если точка A находится вне окружности, то строим на OA (рис. 61) как на диаметре окружность. Прямые AB

и AC, проходящие через данную точку A и точки B и C пересечения построенной окружности с данной, и будут искомыми касательными.

67. Провести касательную к данной окружности, параллельную данной прямой. Из центра O (рис. 62) данной окружности опускаем перпендикуляр OC на данную пря-

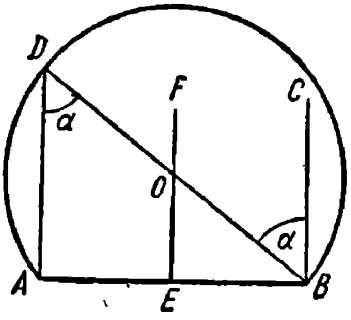

Рис. 59.

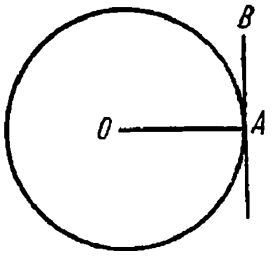

Рис. 60.

мую AB (п. 46) и через точку D пересечения его с окружностью проводим прямую $MN \parallel AB$ (п. 48). Прямая MN и будет искомая.

Есть и второе решение — прямая M_1N_1. Если же прямая AB — касательная, то решение одно.

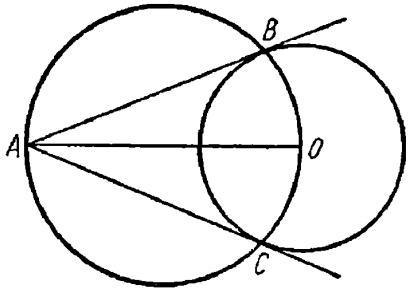

Рис. 61.

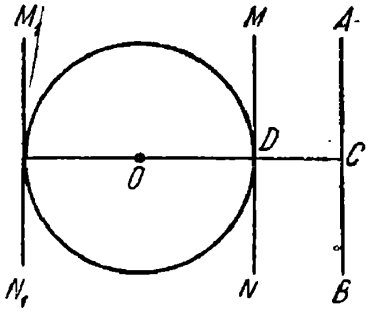

Рис. 62.

68. К данным двум окружностям провести общую касательную. 1. Если одна окружность находится внутри другой, не касаясь ее, то задача не имеет решения.

2. Если одна окружность находится внутри другой, касаясь ее (рис. 63), то задача имеет единственное решение по способу, изложенному в п. 66,1.

3. Если окружности пересекаются, то они имеют две *внешние касательные*. Пусть радиусы окружностей будут

R и $r(R>r)$. Из центра O большей окружности (рис. 64) проводим окружность радиуса $R-r$ и к ней из центра O_1 меньшей окружности проводим касательные O_1A и O_1B по способу п. 66,2. Затем проводим радиус OAC большей

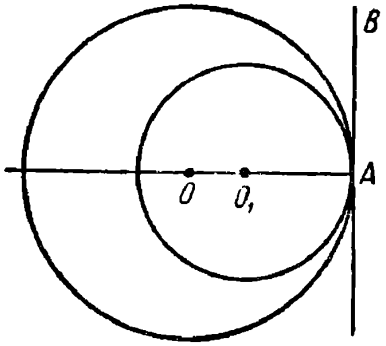

Рис. 63.

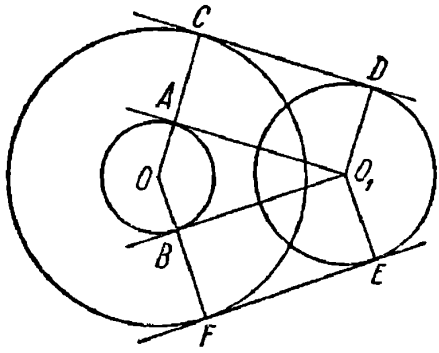

Рис. 64.

окружности и параллельный ему радиус O_1D меньшей окружности. Прямая CD будет общая внешняя касательная. Кроме нее, еще будет внешняя касательная FE.

Если $R=r$, то, проведя диаметры AC и BD (рис. 65) двух окружностей, перпендикулярные к линии центров

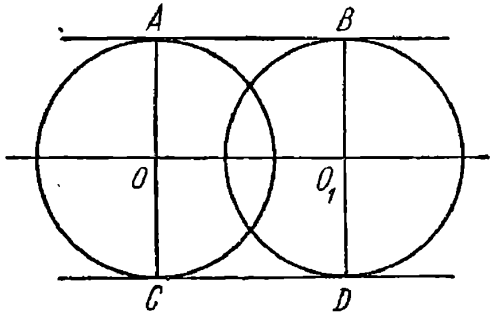

Рис. 65.

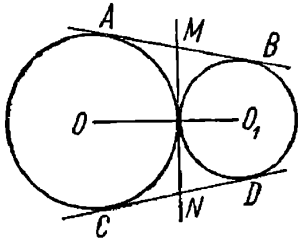

Рис. 66.

OO_1, получим искомые касательные AB и CD, соединив каждые два конца диаметра, лежащие по одну сторону линии центров.

4. Если окружности имеют внешнее касание, то возможны две внешние касательные и одна *внутренняя* (рис. 66). Способ построения, как в пп. 68,3 и 66,1.

5. Если одна окружность находится вне другой, не касаясь ее, то будут две внешние касательные и две внут-

ренние. Внешние строятся так же, как в п. 68, 3. Способ построения внутренних касательных следующий. Пусть радиусы окружностей R и r. Из центра O (рис. 67) одной окружности проводим окружность радиуса $R + r$ и к ней

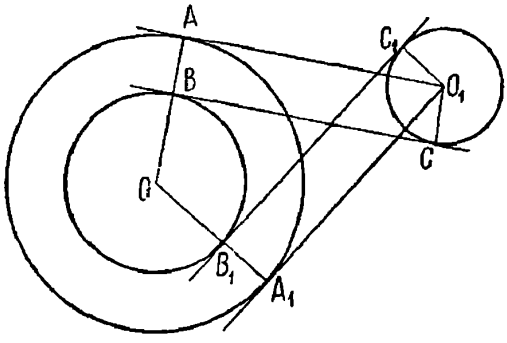

Рис. 67.

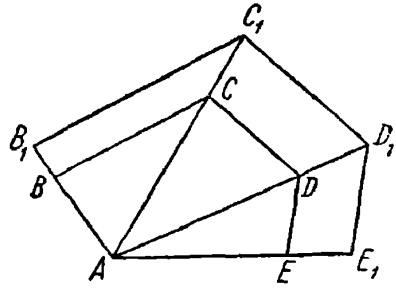

Рис. 68.

из центра O_1 проводим касательные O_1A и O_1A_1 по способу п. 66,2. Затем проводим радиус OBA построенной окружности и параллельный ему радиус O_1C второй данной окружности. Прямая BC будет общая внутренняя касательная. Кроме нее, еще будет внутренняя касательная B_1C_1.

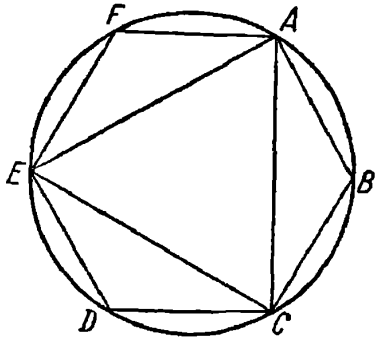

Рис. 69.

69. Построить многоугольник, подобный данному $ABCDE$, зная сторону a, сходственную стороне AB. На прямой AB (рис. 68) откладываем по направлению к B отрезок $AB_1 = a$. Из вершины A проводим все диагонали данного многоугольника, и если $a > AB$ (как на рис. 68), то продолжаем их за вершины. Из точки B_1 проводим $B_1C_1 \parallel BC$ (п. 48) и находим точку C_1 пересечения B_1C_1 с AC. Из точки C_1 проводим $C_1D_1 \parallel CD$ и находим точку D_1 пересечения C_1D_1 с AD. Наконец, строим $D_1E_1 \parallel DE$ и определяем точку E_1 пересечения D_1E_1 и AE. Многоугольник $AB_1C_1D_1E_1$ будет искомым.

70. В данный круг вписать квадрат. Провести два взаимно перпендикулярных диаметра и соединить их концы по-

следовательно. Полученный четырехугольник и будет квадрат.

71. В данный круг вписать правильный шестиугольник. Раствором циркуля, равным радиусу данной окружности, сделать на окружности засечки A, B, C, D, E, F (рис. 69).

Соединив последовательно отрезками прямых построенные точки, получим правильный шестиугольник.

72. В данный круг вписать правильный треугольник. Разделить окружность на 6 равных частей (п. 71) и соединить точки деления через одну.

73. В данный круг вписать правильный пятиугольник. Проводим два взаимно перпендикулярных диаметра AB и MC (рис. 70). Делим радиус AO точкой E пополам. Из точки E как из центра проводим дугу окружности радиуса EM и засекаем ею диаметр AB в точке F. Отрезок MF равен стороне искомого правильного пятиугольника. Раствором циркуля, равным MF, делаем засечки M, N, P, Q, R и соединяем их последовательно.

74. В данный круг вписать правильный десятиугольник. Длина стороны искомого правильного десятиугольника равна отрезку OF в построении п. 73 (рис. 70). Поэтому раствором циркуля, равным отрезку OF, делаем 10 засечек на данной окружности и, соединив последовательно построенные точки, получим правильный десятиугольник.

75. Построить квадрат, равновеликий данному треугольнику. Определяем сторону квадрата как средний пропорциональный отрезок между основанием a треугольника и половиной его высоты h (п. 60). Затем пользуемся п. 56.

76. Построить треугольник, равновеликий данному многоугольнику *ABCDE*. Через вершину C (рис. 71) проводим диагональ CA, отсекающую от данного многоугольника $ABCDE$ треугольник ABC. Затем проводим $BK \parallel CA$ и находим точку K пересечения BK с продолжением AE. Соединив точки C и K отрезком прямой, получим многоугольник $KCDE$, равновеликий данному и имеющий на одну вершину меньше, чем данный. Аналогичным образом можно получить точку L (см. рис. 71) такую, что треугольник KCL будет равновелик многоугольнику $ABCDE$.

Указанным здесь способом можно для любого многоугольника построить равновеликий ему треугольник.

77. Построить квадрат, равновеликий данному многоугольнику. Преобразовав многоугольник в равновеликий ему треугольник (п. 76), строим квадрат, равновеликий полученному треугольнику, по способу, изложенному в п. 75.

78. Построить отрезок, длина которого задана формулой. Рассматривая a, b и c как длины данных отрезков,

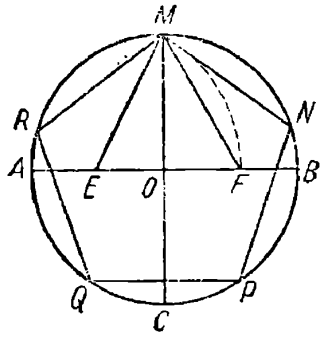

Рис. 70.

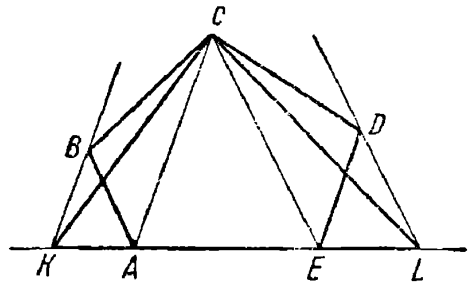

Рис. 71.

можно, пользуясь изложенным в этой главе, построить с помощью циркуля и линейки отрезки, длина которых x задана следующими формулами:

1) $x = a + b$, $x = a - b$, $x = an$, где n — натуральное число (п. 6, 7).

2) $x = \frac{a}{n}$, где n — натуральное число (пп. 44 и 57).

3) $x = a \cdot \frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа (пп. 44, 57 и 7).

4) $x = \frac{ab}{c}$, т. е. $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$ (п. 59).

5) $x = \sqrt{ab}$ (п. 60).

6) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, т. е. найти гипотенузу x по данным катетам a и b (п. 52).

7) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, т. е. построить катет x по данной гипотенузе a и данному катету b (п. 54).

§ 10. Некоторые методы решения задач на построение

79. Общие принципы. 1. *Решить* геометрическую *задачу на построение* — значит начертить фигуру, удовлетворяющую некоторым данным условиям. В решении такой задачи различают четыре части: *анализ*, *построение*, *до-*

казательство и *исследование*. Решение начинается с анализа. Для этого, предполагая возможность решения задачи, делают набросок чертежа и с помощью его пытаются установить связь между данными и искомыми условиями, чтобы эту задачу свести к известным задачам и составить план построения. Фактическое вычерчивание фигуры по этому плану есть вторая часть решения — построение. После этого на основании известных теорем доказывают правильность построения (доказательство). Затем проверяют, не произошло ли потери решений по какой-либо причине, всегда ли возможна задача и сколько будет решений при тех ли иных данных (исследование).

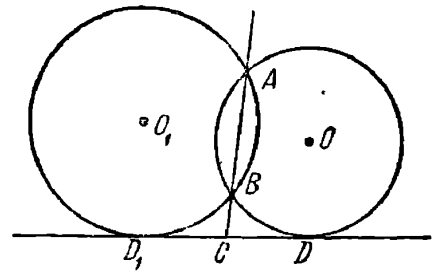

Рис. 72.

2. Приведем пример подробного решения задачи.

З а д а ч а. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касательную к данной прямой.

Анализ. Пусть окружность O (рис. 72) будет искомая. Надо найти ее центр O. Так как две точки A и B окружности даны, то вопрос сводится к определению еще одной точки. Проведя прямую AB до пересечения ее с данной прямой в точке C, видим, что можно найти точку D касания окружности с прямой, если определить отрезок CD, средний пропорциональный между отрезками CA и CB.

Построение. Проводим прямую AB и находим точку C пересечения ее с данной прямой. Затем строим отрезок, средний пропорциональный между отрезками CA и CB, (гл. IV, п. 60) и откладываем его на данной прямой от точки C в обе стороны от нее. Получим точки D и D_1. Теперь проводим окружности через точки A, B и D (гл. IV, п. 61) и через A, B и D_1.

Доказательство. Полученная окружность O проходит через данные точки A и B и через точку D. В точке D окружность касается данной прямой, так как $CD^2 = CA \cdot CB$ (гл. IV. п. 36). Окружность O_1 также удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование. Если точки A и B находятся по одну сторону от данной прямой и прямая AB пересекается с данной прямой, то задача имеет два решения.

Если прямая AB параллельная данной, то существует только одно решение. В этом случае окружность проходит через основание перпендикуляра, опущенного из середины отрезка AB на данную прямую.

Если точка A (или B) лежит на данной прямой, то решение будет единственное.

Если точки A и B лежат по разные стороны от данной прямой или обе лежат на ней, то задача не имеет решения.

80. Метод геометрических мест. 1. Пусть решение задачи на построение приводится к определению одной или нескольких точек, удовлетворяющих некоторым условиям. Тогда, отбросив одно из условий, получим неопределенную задачу, которой будет удовлетворять бесчисленное множество точек, составляющих некоторое геометрическое место. Искомая точка будет находиться на фигуре, например линии, изображающей это геометрическое место. Затем, приняв во внимание отброшенное условие и отбросив какое-нибудь другое, получим фигуру, изображающую другое геометрическое место, на котором также будет находиться искомая точка. Следовательно, точка найдется как точка пересечения этих фигур.

В этом и состоит *метод геометрических мест.*

2. Задача. Построить ромб по данной высоте h и диагонали l.

Пусть искомый ромб $ABCD$ (рис. 73) построен. Видим, что вершина C принадлежит геометрическому месту точек, удаленных от точки A на расстояние l, и геометрическому месту точек, удаленных от прямой AD на расстояние h. Последнему принадлежит также точка B. Кроме того, точки B и D принадлежат геометрическому месту точек, равноудаленных от точек A и C.

Поэтому строим фигуру так. Проводим произвольную прямую и параллельную ей прямую, отстоящую от нее на расстоянии h. Из любой точки A первой прямой как из центра дугой радиуса l засекаем вторую в точке C. Затем проводим прямую, перпендикулярную отрезку AC в его середине (гл. IV, п. 45), и находим точки B и D пересечения перпендикуляра с построенными ранее параллельными прямыми. Фигура $ABCD$ и будет искомый ромб.

Задача имеет единственное решение. Конечно, предполагается, что $h<l$.

81. Метод подобия 1. *Метод подобия* состоит в том, что, пользуясь частью условий задачи, строят сначала фигуру, подобную данной, а затем выбирают из всего множества фигур, подобных построенной, ту, которая даст решение задачи.

2. З а д а ч а. В данный сегмент вписать квадрат так, чтобы две вершины его лежали на хорде, а остальные на дуге сегмента.

Проводим радиус OA (рис. 74), перпендикулярный основанию RL данного сегмента, и пусть B есть точка пересе-

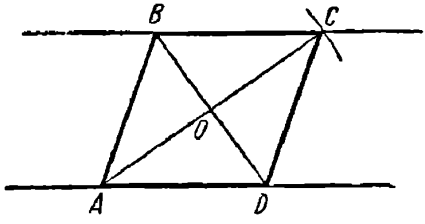

Рис. 73.

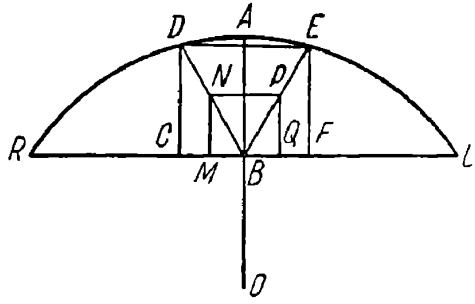

Рис. 74.

чения его с основанием. Строим любой квадрат $MNPQ$, симметричный относительно радиуса OA, сторона которого MQ лежит на RL. Проводим прямую BN до пересечения ее с дугой в точке D и прямую BP, пересекающую дугу в точке E. Из точек D и E опускаем перпендикуляры на RL, основания которых C и F.

Точки C, D, E и F будут вершинами искомого квадрата. Для доказательства можно воспользоваться подобием трех пар треугольников: DCB и NMB; EFB и PQB; DBE и NBP.

Если дуга сегмента $\alpha \leqslant 270°$, то решение единственное. При $\alpha > 270°$ задача не имеет решения.

82. Метод обратности. 1. *Метод обратности* состоит в том, что строят искомую фигуру в некотором произвольном положении, пристраивают к ней данную с соблюдением условий задачи и, подметив дополнительные соотношения между данной и искомой фигурами, строят последнюю так, как это требуется в задаче.

2. З а д а ч а. В данный сектор вписать треугольник, равный данному.

Вместо того чтобы в данный сектор OAB (рис. 75) вписать треугольник, равный данному треугольнику KLM,

попробуем решить обратную задачу: около треугольника KLM описать сектор, равный данному. Предположим, что сектор $O_1A_1B_1$ дает решение этой новой задачи. Из рисунка видим, что центр O_1 должен лежать на дуге сегмента, вмещающего угол, равный данному углу AOB и имеющему данное основание KL. Центр O_1 должен также лежать на дуге с центром M и радиусом, равным OA. Построив эти два геометрических места (гл. IV, п. 65), найдем O_1 а проведя дугу радиуса OA с центром O_1 и прямые O_1K и O_1L

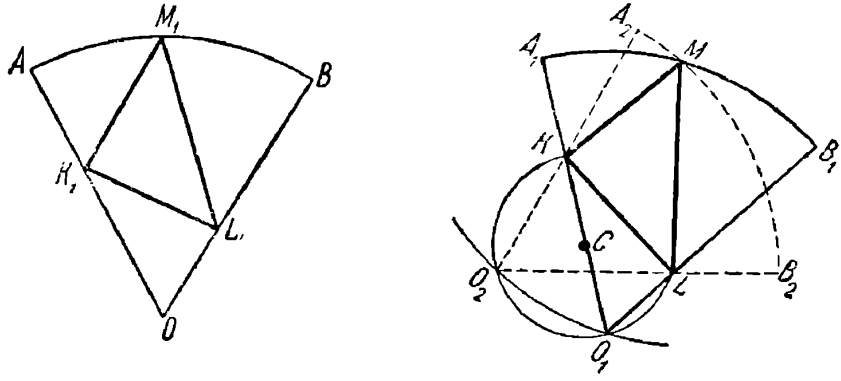

Рис. 75.

до пересечения с построенной дугой в точках A_1 и B_1, найдем решение поставленной задачи.

Отложим на OA отрезок $OK_1 = O_1K$, на прямой OB отрезок $OL_1 = O_1L$ и на дуге AB дугу AM_1, равную дуге A_1M. Треугольник $K_1L_1M_1$ решает данную задачу. В равенстве треугольников $K_1L_1M_1$ и KLM легко убедиться наложением сектора $O_1A_1B_1$ на OAB.

Каждому решению прямой задачи будет соответствовать одно решение обратной и каждому решению обратной — одно решение прямой. Поэтому число решений данной задачи будет зависеть от числа точек O_1. Их может быть одна, две (см. пунктир на рис. 75) и ни одной, если окружности с центрами в точках C и M не пересекутся. Если же учесть, что вершину K_1 можно поместить на OA, или OB, или на $\smile AB$ (и также L_1 и M_1), то максимальное число решений будет 6.

83. Метод параллельного перенесения. 1. *Метод параллельного перенесения* состоит в том, что часть искомой фигуры переносят в новое положение так, что все точки перенесенной части перемещаются на равные, параллельные

и одинаково направленные отрезки прямых. При этом может оказаться, что новая фигура, полученная с помощью перенесенных частей искомой, может быть легко построена и на ней удастся подметить зависимости, которые позволят решить данную задачу.

2. Задача. Построить треугольник по его медианам m_a, m_b, m_c.

Предположим, что задача решена и треугольник ABC (рис. 76) является искомым, причем $AD = m_a$, $BE = m_b$, $CF = m_c$. Сделаем параллельное перенесение отрезка $OC = \frac{2}{3} m_c$ в положение AC_1 и соединим отрезком точки E и C_1. Из равенства треугольников AEC_1 и CEO вытекает, что EC_1 и OE лежат на одной прямой, следовательно, фигура AOC_1 — треугольник, а AE, половина стороны искомого треугольника, — медиана его. Нетрудно видеть, что две другие медианы треугольника AOC_1 будут половинами двух других сторон искомого. Отсюда вытекает следующее решение задачи. Строим треугольник по трем его данным сторонам $\frac{4}{3}m_a$, $\frac{4}{3}m_b$, $\frac{4}{3}m_c$ (гл. IV, п. 50). Затем строим треугольник, стороны которого равны медианам предыдущего. Последний треугольник и будет искомым. Доказательство по существу повторяет анализ задачи и потому не приводится.

Если наибольшая из медиан m_a, m_b, m_c меньше суммы двух других, то решение существует, и притом единственное.

84. Метод симметрии. 1. Метод симметрии состоит в том, что для некоторых геометрических данных задачи строят их симметричное изображение относительно оси. При этом новое изображение данных (точек, прямых и т. д.) может помочь обнаружить ранее не замеченные соотношения, облегчающие решение данной задачи.

2. Задача. Построить четырехугольник $ABCD$ по четырем данным сторонам, если диагональ AC делит угол A пополам.

Предположим, что задача решена и четырехугольник $ABCD$ (рис. 77) есть искомый. Отразим вершину D в диагонали AC. Симметричная точка D_1 будет находиться на стороне AB, так как AC — биссектриса угла A. Таким образом, задача сводится к построению треугольника D_1CB по трем сторонам.

Пусть $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $DA = d$. Треугольник можно построить, если наибольшее из чисел b, c и $a - d$ (или $d - a$, если $d > a$) будет меньше суммы двух других. В этом случае задача имеет единственное решение. Если $a = d$, то и $b = c$. В этом случае задача имеет бесчисленное множество решений.

85. **Приложение алгебры к геометрии.** 1. Этот метод состоит в том, что по данным задачи составляют алгебраи-

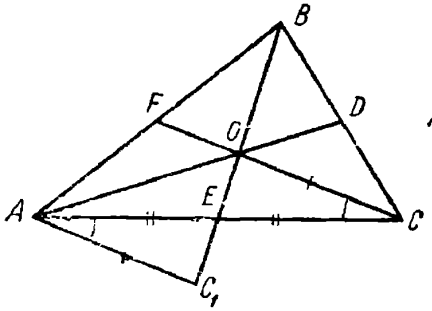

Рис. 76.

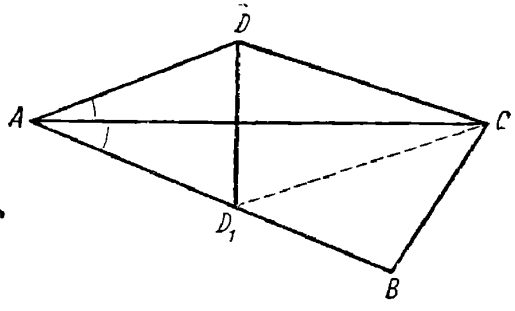

Рис. 77.

ческую формулу для искомой величины или для величины, с помощью которой можно построить искомую фигуру. Формулу исследуют, т. е. выясняют, при всяких ли заданиях она дает решения или лишь при некоторых, и если дает, то сколько. Затем выполняют построение формулы (см. гл. IV, п. 78).

2. З а д а ч а. Построить прямоугольный треугольник, если дана сумма его катетов S и высота h, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу.

Пусть x и y — длины катетов, а z — длина гипотенузы. По условию $x + y = S$, по теореме Пифагора $x^2 + y^2 = z^2$ и по формуле площади треугольника $xy = zh$. Отсюда получим:

$$x^2 + y^2 + 2xy = S^2,\ z^2 + 2zh = S^2,\ z^2 + 2zh - S^2 = 0,$$

$$z = -h \pm \sqrt{h^2 + S^2}.$$

Знак минус должен быть отброшен, так как z — величина положительная. Зная гипотенузу $z = \sqrt{h^2 + S^2} - h$ и высоту h, можно построить треугольник. Для этого строим отрезок $\sqrt{h^2 + S^2}$ (см. гл. IV, п. 78, 6), отрезок h и разность их, которая даст гипотенузу. Затем на гипотенузе как на диаметре строим полуокружность и находим точку

пересечения ее с прямой, параллельной гипотенузе и отстоящей от гипотенузы на расстояние, равное h.

Возможность решения будет зависеть от того, найдется ли фактически точка пересечения построенных полуокружности и прямой. Для этого должно выполняться неравенство:

$$\frac{1}{2}z \geqslant h, \text{ или } \sqrt{h^2+S^2} - h \geqslant 2h,$$

что дает:

$$\sqrt{h^2+S^2} \geqslant 3h, \; h^2+S^2 \geqslant 9h^2, \; h \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}S.$$

Если это соотношение выполняется, то задача имеет единственное решение. Если $h > \frac{1}{2\sqrt{2}}S$, то решений нет.

Любопытно, что при любом h имеем:

$$x + y > z.$$

З а м е ч а н и е. Разобранные здесь методы решения задач на построение далеко не исчерпывают все существующие. Эти вопросы обстоятельно разъяснены в книгах: И. И. А л е к с а н д р о в, Сборник геометрических задач на построение, Учпедгиз, 1950, и А. А д л е р, Теория геометрических построений, Учпедгиз, 1940.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

§ 11. Взаимное расположение прямых и плоскостей

86. Определение положения плоскости. 1. *Плоскостью* называется поверхность, обладающая тем свойством, что всякая прямая, имеющая с поверхностью две общие точки, лежит на этой поверхности, т. е. все точки такой прямой принадлежат поверхности.

2. Через точку можно провести бесконечное множество плоскостей. Совокупность всех этих плоскостей называется *связкой плоскостей*, проходящих через данную точку.

3. Через две точки (или через прямую) можно провести бесконечное множество плоскостей. Совокупность всех этих плоскостей называется *пучком плоскостей*, проходящих через данную прямую.

4. Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

Точно так же можно провести единственную плоскость через прямую и точку вне ее, через две пересекающиеся прямые и через две параллельные прямые.

87. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Проекция точки и линии на плоскость. 1. Прямая и плоскость, имеющие только одну общую точку, называются *пересекающимися*, а не имеющие общей точки — *параллельными*. Прямая называется *перпендикуляром к плоскости*, если она пересекается с плоскостью и образует прямой угол со всякой прямой, проведенной на плоскости через их точку пересечения (*основание перпендикуляра* на плоскость). Если прямая перпендикулярна к плоскости, то плоскость называется *перпендикулярной* к этой прямой. Через всякую точку можно провести перпендикуляр к плоскости и притом только один. Точно так же через всякую точку можно провести плоскость, перпендикулярную к прямой, и притом только одну. Если плоскость перпендикулярна к одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой. Обратно, два перпендикуляра к одной и той же плоскости параллельны между собой. Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна к двум прямым, проведенным на плоскости через точку пересечения прямой и плоскости, то прямая перпендикулярна к плоскости.

Прямая, пересекающая плоскость, но не являющаяся перпендикуляром к ней, называется *наклонной* к этой плоскости.

2. *Проекцией точки* на плоскость называется основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость. *Проекцией линии* на плоскость называется геометрическое место проекций всех точек линии на эту плоскость.

Если из одной и той же точки, взятой вне плоскости, проведены к этой плоскости перпендикуляр и несколько наклонных, то для их отрезков, заключенных между данной точкой и основаниями, справедливы следующие теоремы: а) отрезок перпендикуляра короче отрезка любой наклонной; б) отрезки наклонных равны, если равны их проекции на плоскость; в) из двух отрезков наклонных тот больше, у которого проекция на плоскость больше.

Справедливы и теоремы, обратные этим.

Длина отрезка перпендикуляра, опущенного из некоторой точки на плоскость, заключенного между этой точ-

кой и основанием перпендикуляра, называется *расстоянием от точки до плоскости*.

Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной (*теорема о трех перпендикулярах*). Обратно, прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно к этой наклонной, перпендикулярна и к ее проекции на эту плоскость.

88. Параллельные прямая и плоскость. Прямая и плоскость, перпендикулярные к одной и той же прямой, параллельны между собой.

Если прямая параллельна некоторой прямой, проведенной на плоскости, то она параллельна этой плоскости или лежит в ней.

Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая параллельна линии пересечения плоскостей. Отсюда следует, что две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой и что прямая, параллельная двум пересекающимся плоскостям, параллельна линии их пересечения.

89. Параллельные плоскости. 1. Две плоскости, не имеющие общей точки, называются *параллельными*.

Через всякую точку, взятую вне плоскости, можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.

2. Две плоскости, перпендикулярные к одной и той же прямой, параллельны между собой. Обратно, если прямая перпендикулярна к одной из параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и к другой.

Если две пересекающиеся прямые, проведенные на одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, проведенным на другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

3. Линии пересечения плоскости с параллельными плоскостями параллельны между собой. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны между собой. В частности, отрезки перпендикуляров к двум параллельным плоскостям, заключенные между этими плоскостями, равны. Общая длина их называется *расстоянием между параллельными плоскостями*.

90. Углы. 1. Два угла с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами равны и лежат в параллельных плоскостях (или в одной плоскости).

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются *скрещивающимися*. Если дано положение двух скрещивающихся прямых и их направления, то *углом между скрещивающимися прямыми* называется угол между двумя полупрямыми, проведенными из произвольной точки пространства, соответственно параллельными данным прямым и одинаково с ними направленными.

2. *Углом прямой с плоскостью*, если она не перпендикулярна плоскости, называется острый угол, образованный этой прямой с ее проекцией на плоскость. Этот угол является наименьшим из всех углов, которые образует прямая с любой прямой, проведенной на плоскости. Угол плоскости с перпендикуляром к ней равен прямому.

3. Прямая, проведенная на плоскости, делит эту плоскость на две *полуплоскости*.

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями (*грани угла*), исходящими из одной прямой (*ребро угла*).

Линейным углом двугранного угла называется угол, образованный перпендикулярами к ребру, проведенными в обеих гранях угла через одну и ту же точку ребра.

Плоскость линейного угла перпендикулярна к ребру соответствующего ему двугранного угла, потому что она проходит через две прямые, перпендикулярные к этому ребру.

Равным двугранным углам соответствуют и равные линейные углы, а большему из двух двугранных углов соответствует и больший линейный угол. Обратно, равным линейным углам соответствуют и равные двугранные углы, а большему из двух линейных углов соответствует и больший двугранный угол. Если за единицу измерения двугранных углов выбран двугранный угол, линейный угол которого является единицей для измерения линейных углов, то можно сказать, что двугранные углы измеряются соответствующими им линейными углами.

Двугранный угол называется *прямым*, если ему соответствует прямой линейный угол. Все прямые двугранные углы равны между собой. Подобно углам на плоскости, двугранные углы бывают *смежные* и *вертикальные*. Очевидно, сумма смежных двугранных углов равна двум прямым, а вертикальные двугранные углы равны.

Плоскости называются *взаимно перпендикулярными*, если они образуют прямой двугранный угол.

Двугранные углы с соответственно параллельными гранями равны или в сумме составляют два прямых.

Плоскость, проходящая через перпендикуляр к другой плоскости, перпендикулярна к этой плоскости.

Перпендикуляр к плоскости, имеющий общую точку с другой плоскостью, перпендикулярной к первой, целиком лежит во второй плоскости.

Линия пересечения двух плоскостей, перпендикулярных к третьей плоскости, является перпендикуляром к третьей плоскости.

4. *Многогранным углом* называется фигура, образованная частями нескольких плоскостей (*грани угла*), расположенных так, что все они проходят через одну точку (*вершина угла*) и каждая ограничена с двух сторон полупрямыми (*ребра угла*), являющимися линиями последовательного пересечения этих плоскостей.

Углы, заключенные между соседними ребрами многогранного угла, называются *плоскими*.

Если весь многогранный угол расположен по одну сторону от каждой его грани, неограниченно продолженной, то он называется *выпуклым*. В зависимости от числа граней многогранные углы бывают *трехгранные*, *четырехгранные* и т. д.

В трехгранном угле любой плоский угол меньше суммы двух других плоских углов и больше их разности.

В выпуклом многогранном угле сумма плоских углов меньше 360°.

§ 12. Основные задачи на построение

91. Общие замечания. При решении задач на построение в пространстве предполагается: плоскость дана и может быть построена, если даны элементы, определяющие ее (три точки, прямая и точка и т. д.); прямая линия дана и может быть построена, если даны две плоскости, пересекающиеся по этой прямой; все построения в плоскости, которые выполнялись в планиметрии, могут быть выполнены, если эта плоскость дана.

92. Через данную точку, расположенную вне данной плоскости, провести прямую, параллельную этой плоскости. Через данную точку A (рис. 78) и любые две точки M и N

данной плоскости P проводим плоскость Q. Через точку A в плоскости Q проводим прямую AB, параллельную линии пересечения MN плоскостей P и Q. Прямая AB — искомая.

Задача имеет бесчисленное множество решений.

93. Через данную точку, расположенную вне данной прямой, в пространстве провести прямую, параллельную этой прямой. Через данные точку и прямую проводим плоскость и в ней через данную точку проводим прямую, параллельную данной прямой. Последняя и даст решение. Оно единственное.

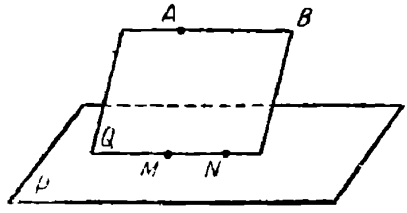

Рис. 78.

94. Через данную точку провести плоскость, параллельную данной плоскости, не проходящей через данную точку. Через данную точку проводим две прямые, параллельные данной плоскости (гл. IV, п. 92). Плоскость, проходящая через эти прямые, и есть искомая. Решение единственное.

95. Через данную прямую провести плоскость, параллельную другой данной прямой. 1. Если данные прямые параллельны, то задача имеет бесчисленное множество решений: любая плоскость, проходящая через одну из них (но не проходящая через другую), параллельна другой.

2. Если данные прямые скрещиваются, то через любую точку первой прямой проведем прямую, параллельную второй (гл. IV, п. 93). Плоскость, проходящая через первую прямую и построенную, будет искомой. Решение единственное.

96. Через данную точку провести плоскость, перпендикулярную данной прямой. 1. Пусть данная точка A (рис. 79) лежит на данной прямой AB. Через AB проведем две любые плоскости P и Q и в них построим прямые AC и AD, перпендикулярные к AB. Искомая плоскость проходит через AC и AD. Решение единственное.

2. Пусть данная точка C (рис. 79) не лежит на данной прямой AB. Проводим плоскость P, проходящую через AB и C, и любую плоскость Q, проходящую через AB. В первой строим $CA \perp AB$ и во второй $AD \perp AB$. Искомая плоскость проходит через AC и AD. Она единственная.

97. Через даиную точку провести прямую, перпендикулярную данной плоскости. 1. Пусть данная точка A (рис. 80) лежит в данной плоскости P. Через точку A в плоскости P проводим две взаимно перпендикулярные прямые AB и AC. Через одну из них, например через AB,

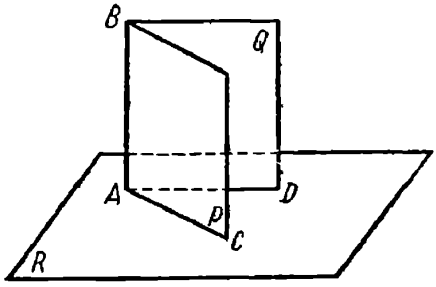

Рис. 79.

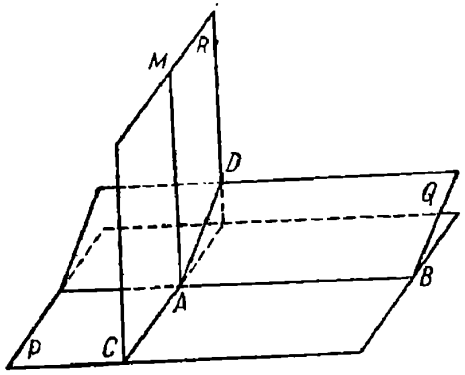

Рис. 80.

проводим любую плоскость Q и в ней прямую $AD \perp AB$. Через прямые AC и AD проводим плоскость R и в ней прямую $AM \perp AC$. Прямая AM — искомая.

Решение задачи единственное.

2. Если данная точка не лежит в данной плоскости, то можно взять любую точку этой плоскости, провести через нее перпендикуляр к этой плоскости и построить прямую, проходящую через данную точку, параллельно проведенному перпендикуляру. Решение единственное.

§ 13. Многогранники

98. Многогранник. *Многогранником* называется тело, ограниченное со всех сторон плоскими многоугольниками. Эти многоугольники называются *гранями* многогранника, а стороны и вершины граней — *ребрами и вершинами* многогранника.

Многогранник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону от каждой своей грани, неограниченно продолженной. Отрезки прямых, соединяющие две вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называются *диагоналями* многогранника.

99. Объем. Величина части пространства, занимаемая многогранником или другим геометрическим телом, называется *объемом* этого тела. Объему приводят в соответ-

ствие некоторое число, измеряющее его. При этом требуют, чтобы равным телам соответствовали и равные числа, измеряющие их объемы, и чтобы число, измеряющее объем тела, состоящего из нескольких частей, равнялось сумме чисел, измеряющих объемы всех этих частей.

Иногда число, измеряющее объем, также называют объемом.

Тела, имеющие равные объемы, называются *равновеликими*.

При измерении объемов за единицу измерения принимают куб (гл. IV, п. 101), ребро которого равно единице.

100. Призма. 1. *Призмой* называется многогранник, у которого две грани — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами (*основания призмы*), а все остальные — параллелограммы (*боковые грани*), плоскости которых параллельны одной и той же данной прямой.

Ребра призмы, соединяющие вершины разных оснований, называются *боковыми*. Боковые ребра равны между собой. Если боковые ребра перпендикулярны к основаниям, то призма называется *прямой*. В противном случае призма называется *наклонной*. Если основания прямой призмы — правильные многоугольники, то призма называется *правильной*.

Высотой призмы называется расстояние между ее основаниями.

2. *Перпендикулярным сечением* призмы называется многоугольник, который получится в результате пересечения боковых граней призмы или их продолжений плоскостью, перпендикулярной к боковому ребру.

Сумма площадей всех боковых граней призмы называется *боковой поверхностью призмы*. Боковая поверхность призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро ($S_{бок} = 2pl$).

Объем призмы равен произведению площади основания на высоту ($V = Sh$) или произведению площади перпендикулярного сечения на боковое ребро ($V = S_1 l$).

101. Параллелепипед. 1. *Параллелепипедом* называется такая призма, основания которой — параллелограммы.

Параллелепипеды, как и призмы, бывают *прямые* и *наклонные*. Если основания прямого параллелепипеда — прямоугольники, то он называется *прямоугольным*. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в

одной вершине, рассматривают как *длину*, *ширину* и *высоту* параллелепипеда, а все вместе называют его *измерениями*. Если все измерения прямоугольного параллелепипеда равны, то его называют *кубом*.

2. В параллелепипеде противоположные грани равны и параллельны, а все диагонали пересекаются в одной точке и в этой точке делятся пополам. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

3. Объем параллелепипеда, как и всякой призмы, равен произведению площади основания на высоту ($V = Sh$). Объем прямоугольного параллелепипеда, кроме того, равен произведению трех его измерений ($V=abc$). Объем куба равен кубу его ребра ($V = a^3$).

102. Пирамида. 1. *Пирамидой* называется многогранник, одна грань которого — многоугольник (*основание пирамиды*), а все остальные грани — треугольники (*боковые грани пирамиды*), имеющие общую вершину (*вершина пирамиды*).

Если основанием пирамиды является треугольник, четырехугольник и т. д., то пирамида называется *треугольной*, *четырехугольной* и т. д. Треугольная пирамида называется также *тетраэдром*.

Высотой пирамиды называется расстояние между ее вершиной и плоскостью основания.

Пирамида называется *правильной*, если ее основание есть правильный многоугольник, а вершина проектируется в центр этого многоугольника.

Боковые грани правильной пирамиды — равные равнобедренные треугольники. Высота каждого такого треугольника, проведенная из вершины пирамиды, называется *апофемой* правильной пирамиды.

Если у пирамиды боковые ребра равны, то около основания можно описать окружность и вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности. Если боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то в основание можно вписать окружность и вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности.

2. Если пирамида рассечена плоскостью, параллельной плоскости основания, то она делит боковые ребра и высоту пирамиды на пропорциональные части; в сечении образуется многоугольник, подобный основанию; отноше-

ние площади сечения к площади основания равно отношению квадратов их расстояний от вершины.

3. Сумма площадей всех боковых граней пирамиды называется *боковой поверхностью пирамиды*. Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению периметра основания на половину апофемы ($S_{бок} = pl$).

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту ($V = \frac{1}{3}Sh$).

Пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами равновелики.

103. Усеченная пирамида. 1. *Усеченной пирамидой* называется часть пирамиды, заключенная между основанием пирамиды и сечением пирамиды, параллельным основанию. Это сечение называется *верхним основанием* усеченной пирамиды, а основание пирамиды — *нижним основанием* усеченной пирамиды. *Высотой* усеченной пирамиды называется расстояние между ее основаниями.

Усеченная пирамида называется *правильной*, если она является частью правильной пирамиды. Боковые грани ее — равные равнобедренные трапеции. Высота такой трапеции, проходящая через середины ее оснований, называется *апофемой* правильной усеченной пирамиды.

2. Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров ее оснований на апофему [$S_{бок} = (P + p)\,l$].

Объем усеченной пирамиды равен сумме объемов трех пирамид, имеющих высоту, равную высоте этой усеченной пирамиды, а основаниями: одна — нижнее основание данной пирамиды, другая — верхнее, а площадь основания третьей пирамиды равна среднему геометрическому площадей верхнего и нижнего оснований:

$$\left[V = \frac{1}{3} h\ (S + s + \sqrt{Ss}) \right]$$

104. Правильные многогранники. *Правильным многогранником* называется такой выпуклый многогранник, у которого все грани — равные правильные многоугольники и все многогранные углы равны.

Гранями правильного многогранника могут служить лишь правильные треугольники, квадраты и пятиугольники.

Всего существует пять видов правильных многогранников: *правильный тетраэдр*, или *четырехгранник* (рис. 81);

гексаэдр, или *куб* (рис. 82); *октаэдр*, или *восьмигранник* (рис. 83); *додекаэдр*, или *двенадцатигранник* (рис. 84); *икосаэдр*, или *двадцатигранник* (рис. 85).

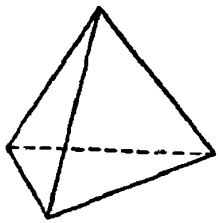

Рис. 81.

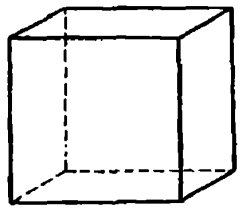

Рис. 82.

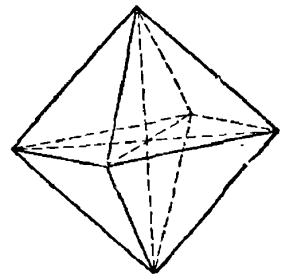

Рис. 83.

Введем обозначения: n — число граней многогранника, k — число вершин, l — число ребер, a — длина ребра. Для всякого выпуклого многогранника (и для некоторых других), в частности для правильного, сумма числа граней

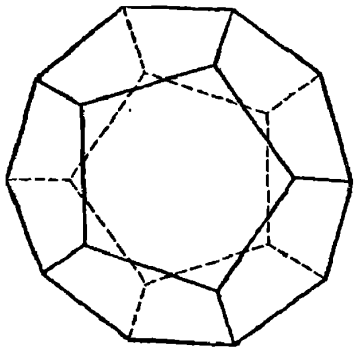

Рис. 84.

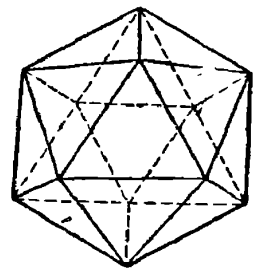

Рис. 85.

и вершин на две единицы больше числа ребер (*теорема Эйлера*): $n + k = l + 2$.

Обозначив площадь полной поверхности правильного многогранника через s, его объем через v, а число сторон грани через m, можно составить следующую таблицу для значений m, n, k, l, s, v, a различных правильных многогранников:

Наименование многогранника	n	m	k	l	s	v
Тетраэдр	4	3	4	6	$1{,}73\ a^2$	$0{,}12\ a^3$
Гексаэдр	6	4	8	12	$6\ a^2$	a^3
Октаэдр	8	3	6	12	$3{,}46\ a^2$	$0{,}47\ a^3$
Додекаэдр	12	5	20	30	$20{,}64\ a^2$	$7{,}66\ a^3$
Икосаэдр	20	3	12	30	$8{,}66\ a^2$	$2{,}18\ a^3$

§ 14. Цилиндр и конус

105. Цилиндрическая поверхность и цилиндр. 1. *Цилиндрической поверхностью* называется поверхность, образованная движением прямой (AB, рис. 86), перемещающейся в пространстве параллельно данной прямой и пересекающей данную линию (CDE, рис. 86). Прямая AB называется *образующей*, а линия CDE — *направляющей* цилиндрической поверхности.

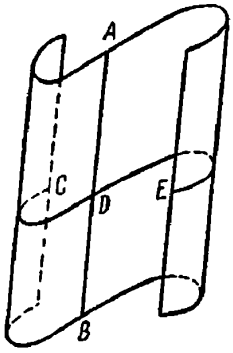

Рис. 86.

2. *Цилиндром* называется тело, ограниченное замкнутой цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями. Расстояние между этими плоскостями называется *высотой* цилиндра, а части их, заключенные внутри цилиндрической поверхности, *основаниями* цилиндра. Если образующая цилиндра перпендикулярна к его основаниям, то он называется *прямым*. В противном случае — *наклонным*. Прямой цилиндр, основания которого — круги, называется *прямым круговым цилиндром*. Так как в элементарной математике изучается только прямой круговой цилиндр, то под словом «цилиндр» обычно подразумевают именно прямой круговой. Часто и цилиндрическую поверхность называют просто цилиндром.

3. Призма называется *вписанной* в цилиндр, если ее основания являются многоугольниками, вписанными в основания цилиндра. Цилиндр в этом случае называется *описанным* около призмы.

Аналогично определяются *описанная* около цилиндра призма и *вписанный* в призму цилиндр.

4. Часть цилиндрической поверхности цилиндра, заключенная между его основаниями, называется *боковой поверхностью цилиндра*.

Так как цилиндрическая поверхность принадлежит к кривым поверхностям, т. е. к таким, у которых никакая часть не может быть совмещена с частью плоскости, то и способы измерения площадей плоских фигур не могут быть применены для измерения площади боковой поверхности цилиндра. Поэтому дадим *определение*, что такое площадь боковой поверхности цилиндра.

Площадью боковой поверхности цилиндра называется общий предел боковых поверхностей вписанных в цилиндр и описанных около него правильных одноименных призм, когда число сторон каждого основания неограниченно увеличивается путем последовательного удвоения (см. замечание к п. 42, гл. IV).

Площадь боковой поверхности цилиндра, когда это не вызывает недоразумений, тоже называют *боковой поверхностью.*

Площадь боковой поверхности прямого кругового цилиндра равна произведению длины окружности его основания на высоту ($S_{бок} = 2\pi rh$).

5. *Объем цилиндра* есть общий предел объемов вписанных в цилиндр и описанных около него правильных одноименных призм, когда число сторон каждого основания неограниченно увеличивается путем последовательного удвоения (см. замечание к п. 43, гл. IV).

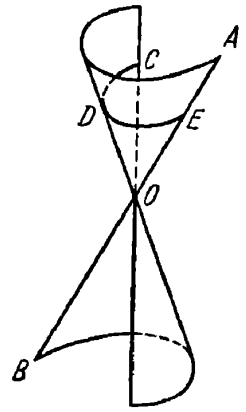

Рис. 87.

Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту ($V = Sh = \pi r^2 h$).

106. Коническая поверхность и конус. 1. *Конической поверхностью* называется поверхность, образованная движением прямой (AB, рис. 87), перемещающейся в пространстве так, что она при своем движении постоянно проходит через данную точку (O) и пересекает данную линию (CDE). Прямая AB называется *образующей*, точка O — *вершиной*, а линия CDE — *направляющей* конической поверхности.

2. *Конусом* называется тело, ограниченное частью замкнутой конической поверхности, расположенной по одну сторону от вершины, и плоскостью, пересекающей все образующие с той же стороны от вершины.

Расстояние от вершины до секущей плоскости называется *высотой*, а часть плоскости, заключенная внутри конической поверхности — *основанием конуса.* Часть конической поверхности, заключенная между вершиной и основанием, называется *боковой поверхностью конуса.*

Конус называется *прямым круговым*, если его основание есть круг, а вершина проектируется в центр этого

круга. В элементарной геометрии под словом «конус» обычно подразумевают «прямой круговой».

Пирамида называется *вписанной* в конус, если ее основание есть многоугольник, вписанный в основание конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. Конус в этом случае называется *описанным* около пирамиды.

Аналогично определяются *описанная* около конуса пирамида и *вписанный* в пирамиду конус.

Часто и коническую поверхность называют просто конусом.

3. Так как коническая поверхность принадлежит к кривым поверхностям, т. е. к таким, у которых никакая часть не может быть совмещена с частью плоскости, то и способы измерения площадей плоских фигур не могут быть применены для измерения площади боковой поверхности конуса. Поэтому дадим *определение*, что такое площадь боковой поверхности конуса.

Площадью боковой поверхности конуса называется общий предел боковых поверхностей вписанных в конус и описанных около него правильных одноименных пирамид, когда число сторон каждого основания неограниченно увеличивается путем последовательного удвоения (см. замечание к п. 42, гл. IV).

Площадь боковой поверхности прямого кругового конуса равна произведению длины окружности основания на половину образующей ($S_{бок} = 2\pi r \cdot \frac{l}{2} = \pi r l$).

При этом слово «образующая» здесь употреблено ради краткости вместо слов «отрезок образующей, заключенный между вершиной конуса и его основанием».

Точно так же и площадь боковой поверхности иногда ради краткости называют просто *боковой поверхностью*.

4. *Объем конуса* есть общий предел объемов вписанных в конус и описанных около него правильных одноименных пирамид, когда число сторон каждого основания неограниченно увеличивается путем последовательного удвоения (см. замечание к п. 43, гл. IV).

Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту ($V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \pi r^2 h$).

107. Усеченный конус. 1. *Усеченным конусом* называется часть конуса, заключенная между основанием конуса и

сечением конуса, параллельным основанию. Это сечение называется *верхним основанием* усеченного конуса, а основание конуса — *нижним основанием* усеченного конуса. *Высотой* усеченного конуса называется расстояние между его основаниями. Усеченный конус называется *прямым круговым*, если он является частью прямого кругового конуса.

2. Площадь боковой поверхности прямого кругового усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую[1] $[S_{бок} = \pi (R + r)l]$.

Объем усеченного конуса равен сумме объемов трех конусов, имеющих высоту, равную высоте этого усеченного конуса, а основаниями: один — нижнее основание данного конуса, другой — верхнее, а площадь основания третьего конуса равна среднему геометрическому площадей верхнего и нижнего оснований:

$$\left[V = \frac{1}{3} h(S + s + \sqrt{Ss}), \quad V = \frac{1}{3} h\pi(R^2 + r^2 + Rr)\right].$$

108. Поверхность вращения. 1. *Поверхностью вращения* называется поверхность, образованная движением линии (ABC, рис. 88), которая вращается вокруг некоторой прямой (MN, рис. 88), называемой *осью вращения*, причем угол поворота принимает последовательно все возможные значения, а линия при своем вращении неизменно связана с осью.

2. Цилиндрические поверхности, у которых сечения плоскостью, перпендикулярной образующей (*перпендикулярное сечение*), есть круг, являются поверхностями вращения прямой вокруг оси, параллельной этой прямой. Поэтому прямой круговой цилиндр можно рассматривать как тело, ограниченное поверхностью вращения, образованной вращением контура прямоугольника вокруг одной из его сторон как оси.

3. Прямой круговой конус можно рассматривать как тело, ограниченное поверхностью вращения, образованной вращением контура прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов как оси.

---

[1] Точнее, на *отрезок образующей*, заключенный между основаниями.

4. Прямой круговой усеченный конус можно рассматривать как тело, ограниченное поверхностью вращения, образованной вращением контура прямоугольной трапеции вокруг стороны, перпендикулярной основаниям, как оси.

5. Если цилиндр, конус и усеченный конус (прямые круговые) рассматривать как тела вращения, то для них можно сформулировать следующее об-

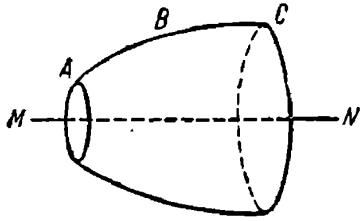

Рис. 88.

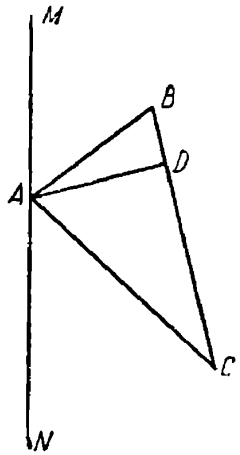

Рис. 89.

щее правило определения площади боковой поверхности: площадь боковой поверхности равна произведению высоты тела на длину окружности радиуса, равного отрезку перпендикуляра, восставленного к образующей из ее середины, и заключенного между образующей и осью вращения.

6. Пусть треугольник (ABC, рис. 89) вращается вокруг оси (MN), которая проходит через вершину (A) треугольника, лежит в плоскости этого треугольника, но не пересекает третьей стороны (BC)[1]. Объем тела, образованного таким вращением, равен произведению площади поверхности вращения этой стороны (BC) на одну треть опущенной на нее высоты (AD).

§ 15. Шар

109. Шаровая поверхность и шар. 1. *Шаровой, или сферической, поверхностью* называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от данной точки, называемой *центром* шара. Отрезок прямой, соединяю-

[1] Однако может проходить через вершину B или C.

щий центр с какой-нибудь точкой шаровой поверхности, называется *радиусом*. Отрезок прямой, соединяющий две точки шаровой поверхности, называется *хордой*. Хорда, проходящая через центр, называется *диаметром*. Шаровую поверхность можно также рассматривать как поверхность, образованную вращением полуокружности вокруг ее диаметра.

Тело, ограниченное шаровой поверхностью, называется *шаром*.

2. Всякое сечение шара плоскостью есть круг радиуса $\sqrt{R^2 - d^2}$, где R — радиус шара, а d — расстояние от центра до секущей плоскости.

Равноотстоящие от центра плоские сечения шара равны, а из двух плоских сечений, удаленных от центра на разные расстояния, имеет больший радиус то, которое находится ближе к центру. Наибольший радиус сечения равен радиусу шара. В этом случае секущая плоскость проходит через центр шара и делит его поверхность на две симметричные и равные части; круг, получаемый в сечении, называется *большим кругом*, а ограничивающая его окружность — *окружностью большого круга*. Через две точки шаровой поверхности можно провести окружность большого круга, а если точки не принадлежат одному диаметру, то такая окружность будет единственной. Окружности двух больших кругов при пересечении делятся пополам.

3. Плоскость, имеющая только одну общую точку с шаровой поверхностью, называется *касательной плоскостью* к шаровой поверхности.

Касательная плоскость перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания. Обратно, плоскость, перпендикулярная к радиусу в конце его, лежащем на шаровой поверхности, есть касательная плоскость к этой поверхности.

110. Поверхность и объем шара. 1. *Шаровым поясом* называется часть шаровой поверхности, заключенная между двумя секущими параллельными плоскостями.

Окружности, ограничивающие шаровой пояс, называются его *основаниями*, а расстояние между плоскостями оснований — *высотой пояса*.

Сегментной поверхностью называется часть шаровой поверхности, отсеченная плоскостью.

Окружность, ограничивающая сегментную поверхность, называется *основанием* сегментной поверхности, а часть радиуса, перпендикулярного к плоскости основания, заключенная между этой плоскостью и сегментной поверхностью, — *высотой*.

Подобно тому как шаровую поверхность можно считать поверхностью вращения полуокружности вокруг ее диаметра, так поверхность шарового пояса и сегментной поверхности можно рассматривать как поверхности вращения части окружности около диаметра, не имеющего общей точки с дугой в случае пояса и имеющего одну общую точку в случае сегментной поверхности.

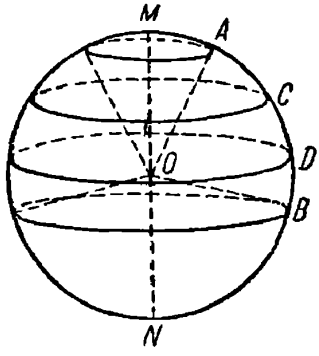

Рис. 90.

2. *Площадью поверхности шарового пояса*, образованного вращением части полуокружности (AB, рис. 90) вокруг диаметра (MN), называется предел, к которому стремится площадь поверхности, образованной вращением около этого диаметра вписанной в дугу правильной ломаной линии ($ACDB$), когда число сторон ломаной линии неограниченно увеличивается путем последовательного удвоения. Это определение остается в силе для площади сегментной и шаровой поверхности.

Площадь поверхности шарового пояса (или сегментной поверхности) равна произведению окружности большого круга на высоту ($S = 2\pi RH$). Площадь поверхности шара (или кратко: *поверхность шара*) равна учетверенной площади большого круга ($S = 4\pi R^2$). Поверхности шаров относятся как квадраты их радиусов или диаметров.

3. *Шаровым сектором* называется тело, ограниченное поверхностью, образованной вращением кругового сектора вокруг диаметра, не пересекающего дугу сектора. При этом один из радиусов кругового сектора может лежать на оси вращения.

4. *Многоугольным сектором* называется многоугольник, ограниченный ломаной, вписанной в дугу окружности, и двумя радиусами этой окружности, проведенными в концы ломаной.

5. *Объем шарового сектора*, образованный вращением кругового сектора (AOB, рис. 90) вокруг диаметра (MN), есть предел, к которому стремится объем, образованный вращением около этого диаметра многоугольного сектора ($ACDBO$), когда число сторон правильной ломаной линии ($ACDB$), вписанной в дугу этого кругового сектора, неограниченно увеличивается путем последовательного удвоения. Это определение остается в силе и для объема шара, если считать центральный угол кругового сектора равным 180°.

Объем шарового сектора равен одной трети произведения радиуса шара на площадь поверхности соответствующего шарового пояса или соответствующей сегментной поверхности $\left(V = \frac{2}{3}\pi R^2 H.\right)$ Объем шара равен одной трети произведения поверхности шара на радиус ($V = \frac{4}{3}\pi R^3$). Объемы шаров относятся как кубы их радиусов или диаметров.

6. *Шаровым сегментом* называется часть шара, отсеченная плоскостью.

Объем шарового сегмента равен объему такого цилиндра, у которого радиус равен высоте сегмента, а высота — радиусу шара без одной трети высоты сегмента: $\left[V = \pi H^2\left(R - \frac{1}{3}H\right)\right]$.

Глава пятая

ТРИГОНОМЕТРИЯ

§ 1. Углы и их измерение

1. Направленные углы. Определение угла на плоскости как фигуры, образованной двумя полупрямыми, исходящими из одной точки, для потребностей тригонометрии недостаточно. *В тригонометрии угол рассматривается как мера вращения,* при котором одна сторона (OA, рис. 91), вращаясь вокруг вершины угла (O), переходит в положение другой стороны (OB). Первую из них называют *началом угла,* а вторую — *концом.* Начало можно перевести в положение конца угла вращением вокруг вершины в направлении, обратном направлению движения часовой стрелки, и в направлении, совпадающем с направлением движения часовой стрелки. В первом случае угол называют *положительным,* а во втором — *отрицательным.* Кроме того, начало можно перевести в положение конца, производя вращение не по кратчайшему пути, а сделав предварительно один или несколько полных оборотов. Таким образом, случаю, изображенному на рисунке 91, соответствуют следующие углы: 25°, $-335°$, 385°, $-695°$ и т. д., вообще $25° + 360°n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Поэтому говорят, что задание начала и конца угла определяет угол *неоднозначно* или *с точностью до кратных 360°.*

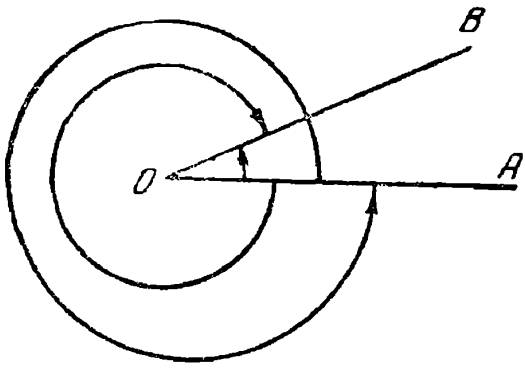

Рис. 91.

С другой стороны, отсюда видно, что угол может принять любое значение от $-\infty$ до $+\infty$. В частности, угол будет равен нулю, если начало и конец его совпадают. Следует иметь в виду, что если начало угла сделать концом, а конец началом, то этот угол не будет равен первоначальному.

2. Радианное измерение углов. В тригонометрии, кроме градусного измерения углов, употребительно также радианное. В этом случае за единицу измерения углов принимается угол, которому соответствует дуга окружности, равная радиусу, если этот угол является центральным в рассматриваемой окружности, т. е. центр ее находится в вершине угла. Этот угол называется *радианом*.

Очевидно, не имеет значения то, какая окружность построена, так как известно из геометрии, что отношение длины дуги к радиусу не зависит от радиуса, а зависит лишь от величины центрального угла, которому эта дуга соответствует.

Иногда радианное измерение углов называют *отвлеченным*. Это неправильно. Подобно тому как в градусном измерении угол выражается именованным числом (числом градусов), так и при радианном измерении угол выражается именованным числом (числом радианов).

3. Переход от радианного измерения углов к градусному и обратно. 1. Так как углу в 180° соответствует полуокружность, то радианная мера его есть $\frac{\pi R}{R} = \pi$ радианов.

Отсюда

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 44{,}8'' \ldots$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радианов} = 0{,}01745\ldots \text{ радиана}.$$

2. Чтобы перейти от радианной меры угла к градусной, нужно число радианов, содержащихся в угле, умножить на $\frac{180^\circ}{\pi}$.

Чтобы перейти от градусной меры угла к радианной, нужно число градусов, содержащихся в угле, умножить на $\frac{\pi}{180}$.

Примеры. а) Найти градусную меру угла, содержащего 1,5 радиана. Решение. $1{,}5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} =$ $= 1{,}5 \cdot 57^\circ 17' 44{,}8'' = 85^\circ 56' 37{,}2''$.

б) Найти радианную меру угла, содержащего 17°. Решение. $17 \cdot \frac{\pi}{180} = 17 \cdot 0{,}01745 = 0{,}29665$ радиана.

4. Длина дуги и площадь сектора. 1. Длина дуги окружности равна произведению радиуса на радианную меру соответствующего ей центрального угла ($l = R\alpha$).

2. Площадь сектора круга равна половине произведения квадрата радиуса на радианную меру центрального угла, соответствующего дуге сектора ($S = \frac{1}{2} R^2\alpha$).

§ 2. Определение тригонометрических функций

5. Радиус-вектор. *Радиус-вектором* точки M (рис. 92) относительно начала координат называется вектор $\overrightarrow{OM}$, соединяющий начало координат O с этой точкой M.

6. Тригонометрические функции. 1. Пусть дан любой угол и система прямоугольных осей координат (рис. 92).

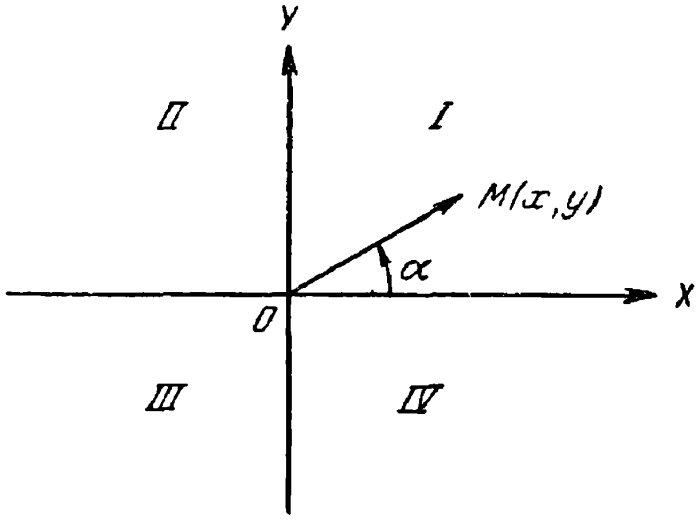

Рис. 92.

Угол будем считать расположенным так, что его вершина находится в начале координат, а начальная сторона направлена по положительной полуоси абсцисс. При таком

расположении угла начальную сторону угла называют *неподвижной*, а другую его сторону — *подвижной*. Радиус-вектор точки подвижной стороны называют *подвижным радиусом*.

2. Оси координат делят плоскость на четыре части, которые называются *координатными углами*, или *четвертями*, или *квадрантами*. *Первым* квадрантом считается тот, который заключен между положительными направлениями полуосей OX и OY (рис. 92). Переход от первого квадранта ко *второму*, *третьему* и *четвертому* совершается в направлении, обратном движению часовой стрелки. Если подвижная сторона угла находится в некотором квадранте, а сам угол положительный и меньший 360°, то про него говорят, что он *лежит в этом квадранте*. Если же этот угол отрицательный или положительный, но больше 360°, то про него говорят, что он *оканчивается в этом квадранте*.

Пример. Угол величиною в 110° лежит во втором квадранте, а угол 470° оканчивается во втором квадранте.

3. Возьмем любую точку M (рис. 92) на подвижной стороне угла α, отличную от начала координат. Пусть длина OM подвижного радиуса $\overline{OM}$ равна r, а координаты точки M — числа x и y.

Синусом угла α называется отношение ординаты конца подвижного радиуса, образующего угол α с осью абсцисс, к длине этого радиуса, т. е. $\sin\alpha = \frac{y}{r}$.

Косинусом угла α называется отношение абсциссы конца подвижного радиуса, образующего угол α с осью абсцисс, к длине этого радиуса, т. е. $\cos\alpha = \frac{x}{r}$.

Тангенсом угла α называется отношение ординаты к абсциссе конца подвижного радиуса, образующего угол α с осью абсцисс, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$.

Котангенсом угла α называется отношение абсциссы к ординате конца подвижного радиуса, образующего угол α с осью абсцисс, т. е. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$.

Секансом угла α называется отношение длины подвижного радиуса, образующего угол α с осью абсцисс, к абсциссе конца этого радиуса, т. е. $\sec\alpha = \frac{r}{x}$.

Косекансом угла α называется отношение длины подвижного радиуса, образующего угол α с осью абсцисс, к ординате конца этого радиуса, т. е. $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{r}{y}$.

Значения этих величин не зависят от длины радиус-вектора $\overline{OM}$. Но они зависят от величины угла, и каждому значению угла, за исключением отдельных случаев, о которых сказано ниже, соответствует вполне определенное и единственное значение синуса, косинуса, тангенса, котангенса, секанса и косеканса.

Поэтому их называют *тригонометрическими функциями угла.*

Тангенс и секанс не существуют для углов $90°(2n + 1)$ или в радианах $\frac{(2n+1)\pi}{2}$, а котангенс и косеканс для углов $180°n$ или в радианах πn, где $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

4. *Тригонометрической функцией числа* x называется тригонометрическая функция угла, содержащего x радианов.

Пример. $\sin 2 = \sin 2 \cdot \frac{180°}{\pi} = \sin 114°35'30''$.

5. Значения тригонометрических функций являются отвлеченными числами. Их знаки распределяются по квадрантам так:

Функции \ Квадранты	I	II	III	IV
Синус и косеканс	+	+	−	−
Косинус и секанс	+	−	−	+
Тангенс и котангес	+	−	+	−

6. Функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ по абсолютной величине не больше единицы, т. е. $\leqslant 1$. Функция $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ по абсолютной величине не меньше единицы, т. е. $\geqslant 1$. И только $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ могут принимать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$.

7. Значения тригонометрических функций некоторых углов

Функции \ α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует	0	Не существует	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Не существует	0	Не существует
$\sec \alpha$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	Не существует	-1	Не существует	1
$\operatorname{cosec} \alpha$	Не существует	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	Не существует	-1	Не существует

§ 3. Характер изменения тригонометрических функций с изменением угла

8. Периодичность тригонометрических функций 1. Функция называется *периодической*, если существует такое положительное число, что значение функции при любом значении аргумента не изменится, когда значение аргумента будет уменьшено или увеличено на это число. Само это число называется *периодом* функции. Если l — период, то периодами также будут $\pm 2l$, $\pm 3l$ и т. д. Обычно под периодом понимают наименьший (положительный) период.

2. *Тригонометрические функции — периодические.* При этом тангенс и котангенс имеют период, равный π, или, если аргументом является угол, измеренный в градусах, то 180°. Остальные тригонометрические функции имеют период 2π, а для углов в градусной мере 360°.

Таким образом, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$, $\cos(\alpha + 360^\circ) = \cos\alpha$, $\operatorname{ctg}(\alpha + 180^\circ) = \operatorname{ctg}\alpha$.

9. Изменение тригонометрических функций с возрастанием аргумента от 0 до 2π

Квадранты	I	II
возрастание угла / функции	от 0 до $\frac{\pi}{2}$	от $\frac{\pi}{2}$ до π
$\sin\alpha$	Возрастает от 0 до 1	Убывает от 1 до 0
$\cos\alpha$	Убывает от 1 до 0	Убывает от 0 до —1
$\operatorname{tg}\alpha$	Возрастает от 0 до $+\infty$	Возрастает от $-\infty$ до 0
$\operatorname{ctg}\alpha$	Убывает от $+\infty$ до 0	Убывает от 0 до $-\infty$
$\sec\alpha$	Возрастает от 1 до $+\infty$	Возрастает от $-\infty$ до —1
$\operatorname{cosec}\alpha$	Убывает от $+\infty$ до 1	Возрастает от 1 до $+\infty$

Квадранты	III	IV
возрастание угла / функции	от π до $\frac{3}{2}\pi$	от $\frac{3}{2}\pi$ до 2π
$\sin \alpha$	Убывает от 0 до -1	Возрастает от -1 до 0
$\cos \alpha$	Возрастает от -1 до 0	Возрастает от 0 до 1
$\operatorname{tg} \alpha$	Возрастает от 0 до $+\infty$	Возрастает от $-\infty$ до 0
$\operatorname{ctg} \alpha$	Убывает от $+\infty$ до 0	Убывает от 0 до $-\infty$
$\sec \alpha$	Убывает от -1 до $-\infty$	Убывает от $+\infty$ до 1
$\operatorname{cosec} \alpha$	Возрастает от $-\infty$ до -1	Убывает от -1 до $-\infty$

10. Формулы приведения

x / Функции	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos x$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\sec x$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$\sec\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$

Функции \ x	$\pi + \alpha$	$\frac{3}{2}\pi - \alpha$	$\frac{3}{2}\pi + \alpha$
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos x$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\sec x$	$-\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\sec\alpha$

Функция, не меняющая своего значения от изменения знака у аргумента, называется *четной*. Если же такое изменение знака у аргумента влечет лишь изменение знака значения функции, то она называется *нечетной*.

Из таблицы видно, что косинус и секанс — функции четные, а все остальные тригонометрические функции нечетные.

11. Приведение тригонометрической функции любого угла к функции острого положительного угла.

Формулы приведения верны для любого α, если только при этом значении α тригонометрическая функция существует. Однако чаще всего ими приходится пользоваться тогда, когда α — острый положительный угол, или, если это — число, то удовлетворяющее неравенствам $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Использование их и свойств периодичности тригонометрических функций позволяет вычисление тригонометрических функций любого угла свести к вычислению функций острого положительного угла и даже меньшего $\frac{\pi}{4}$ (или 45°). Для функций же острого угла существуют таблицы.

Примеры. а) $\sin 1135^\circ = \sin (3 \cdot 360^\circ + 55^\circ) = \sin 55^\circ = \sin (90^\circ - 35^\circ) = \cos 35^\circ$; б) $\operatorname{tg}\left(-\frac{33}{5}\pi\right) = -\operatorname{tg}\frac{33}{5}\pi = -\operatorname{tg}\left(6\pi + \frac{3\pi}{5}\right) = -\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5} = -\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$. Или иначе: $\operatorname{tg}\left(-\frac{33}{5}\pi\right) = \operatorname{tg}\left(-7\pi + \frac{2\pi}{5}\right) = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$.

§ 4. Вычисление значений тригонометрических функций по значению одной из них

12. Основные соотношения. Следующие пять формул принято называть *основными*:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Каждая из написанных формул справедлива при любом значении α, за исключением такого, при котором хотя бы одна часть соответствующего равенства теряет смысл. Так, например, первая формула верна при всяком α, а вторая справедлива лишь при $\alpha \neq \frac{2k+1}{2}\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Эти пять равенств независимы, и из них могут быть определены значения пяти любых тригонометрических функций по значению шестой.

Из основных формул легко выводятся следующие три:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \quad \operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha, \quad \operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2\alpha.$$

Каждая из них также справедлива при всех тех значениях, при которых обе части ее имеют смысл.

13. Значения одних тригонометрических функций, выраженных через значения других.

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{\mp\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}{\sec\alpha} = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha};$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha - 1}}{\operatorname{cosec}\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} =$$

$$= \pm\sqrt{\sec^2\alpha - 1} = \frac{1}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha - 1}};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha - 1}} = \pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha - 1};$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{1}{\cos\alpha} = \pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} =$$

$$= \frac{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha - 1}};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha} =$$

$$= \pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{\sec\alpha}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}.$$

Во всех этих формулах перед радикалами ставится знак $+$ или $-$ в зависимости от того, в какой четверти оканчивается угол α (см. п. 6, гл. V).

§ 5. Формулы (теоремы) сложения и их следствия

14. Формулы сложения и вычитания

1. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$

   $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$

   $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$

   $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta};$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}.$$

2. Из первых четырех формул можно получить следующие полезные формулы:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right];$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right];$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right].$$

Пример. Упростить выражение:

$$\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Решение.

$$\frac{1}{2}\left[\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}-15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}+15-\frac{\alpha}{2}\right)\right]-$$
$$-\frac{1}{2}\sin\alpha=\frac{1}{2}\left(\sin\alpha+\sin 30^\circ\right)-\frac{1}{2}\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\frac{1}{4}.$$

Замечание. Нередко при выводе приведенных здесь формул рассматривают лишь случай острых положительных углов α и β, причем таких, что $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$. На самом деле эти формулы верны при любых α и β, конечно, исключая те значения их, при которых левая или правая часть какой-нибудь формулы теряет смысл.

15. Формулы умножения.

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha; \qquad \sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha; \qquad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}; \quad \operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}; \quad \operatorname{ctg}3\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha-3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1}.$$

16. Формулы деления.

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Знаки перед корнями нужно брать в зависимости от того, в каком квадранте лежит (или оканчивается) угол $\frac{\alpha}{2}$.

17. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла.

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

18. Приведение тригонометрических выражений к виду, удобному для логарифмирования.

1) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\quad \sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2};\quad \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\quad \operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

2) $\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right);\quad \cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right);\quad \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha};$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=-2\operatorname{ctg}2\alpha.$$

3) $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2};\quad 1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2};$

$$1 \pm \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right)}{\cos\alpha}; \quad 1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

4) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta);$

$$\cos^2\alpha - \cos^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha);$$

$$\sin^2\alpha - \cos^2\beta = -\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta);$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}; \quad \operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\beta =$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

5) Если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma =$

$$= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}, \quad \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma;$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

6) $a\sin x + b\cos x = \frac{a\sin(x+\varphi)}{\cos\varphi}$, где $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$.

§ 6. Обратные тригонометрические функции

19. Общий вид углов, имеющих одно и то же значение некоторой тригонометрической функции. 1. Пусть α есть какой-нибудь угол (или число), удовлетворяющий равенству $\sin x = a$. Тогда все углы (или числа), удовлетворяющие этому равенству, содержатся в формуле: $x = \pi n + (-1)^n\alpha$. Это выражение называют кратко: *общий вид углов, имеющих данный синус.*

2. Общий вид углов, имеющих данный косинус, может быть записан так: $x = 2\pi n \pm \alpha$.

3. Общий вид углов, имеющих данный тангенс (или котангенс), такой: $x = \pi n \pm \alpha$. Когда угол α выражен в градусах, то формулы будут иметь следующий вид: $180^\circ n + (-1)^n\alpha$, $360^\circ n \pm \alpha$, $180^\circ n + \alpha$.

20. Определение обратных тригонометрических функций. 1. В тригонометрической функции $y = \sin x$ угол x (или число x) является аргументом, а y — функцией. Поменяем ролями функцию и аргумент, т. е. построим функцию, обратную данной. При этом новую функцию будем

также обозначать буквой y, а аргумент — буквой x. Тогда для обратной функции получим: $x = \sin y$. Новая функция называется *арксинусом* и обозначается так:

$$y = \operatorname{Arcsin} x.$$

Записи $y = \operatorname{Arcsin} x$ и $x = \sin y$ равносильны, и поэтому можно сказать, что *арксинус x есть угол (или число), синус которого равен x.*

Вместо слова «угол» часто употребляют слово «дуга». Если y_1 есть какой-нибудь угол, синус которого равен x ($\sin y_1 = x$), то и углы $\pi n + (-1)^n y_1$ будут иметь такой же синус. Поэтому можно записать: $y = \operatorname{Arcsin} x = \pi n + (-1)^n y_1$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Следовательно, функция $y = \operatorname{Arcsin} x$ есть *многозначная* и даже *бесконечнозначная*. Те значения y_1 угла, имеющие синус, равный x, которые удовлетворяют неравенствам $-\frac{\pi}{2} \leqslant y_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$, называются *главными значениями* функции $\operatorname{Arcsin} x$, а множество всех ее главных значений называется *главной ветвью* $\operatorname{Arcsin} x$ и обозначается $\arcsin x$. Отсюда видно, что $\operatorname{Arcsin} x = \pi n + (-1)^n \arcsin x$, причем $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Функция $y = \arcsin x$ определена для x, удовлетворяющих условиям $-1 \leqslant x \leqslant 1$, *однозначна*, *возрастает* от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ с возрастанием x от -1 до $+1$ и *нечетная*, т. е. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

Примеры. а) $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; б) $\arcsin\left(\sin \frac{3}{4}\pi\right) = \operatorname{arc}\sin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

2. Функция, обратная $\cos x$, называется *арккосинусом* и обозначается так:

$$y = \operatorname{Arccos} x.$$

Записи $y = \operatorname{Arccos} x$ и $x = \cos y$ равносильны, и поэтому можно сказать, что *арккосинус x есть угол (или число), косинус которого равен x.* Вместо слова «угол» часто употребляют слово «дуга».

Те значения y_1 функции $\operatorname{Arccos} x$, которые удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant y_1 \leqslant \pi$, называются *главными значениями ее*, а множество всех главных значений — *главной ветвью* $\operatorname{Arccos} x$. Главная ветвь обозначается $\arccos x$.

Отсюда видно, что $\operatorname{Arccos} x = 2\pi n \pm \arccos x$, причем $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$. Функция $y = \arccos x$ определена для x, удовлетворяющих условиям $-1 \leqslant x \leqslant 1$, *однозначна* и *убывает* от π до 0 с возрастанием x от -1 до $+1$.

3. Функция, обратная $\operatorname{tg} x$, называется *арктангенсом* и обозначается так:

$$y = \operatorname{Arctg} x.$$

Записи $y = \operatorname{Arctg} x$ и $x = \operatorname{tg} y$ равносильны, и поэтому можно сказать, что *арктангенс x есть угол (или число), тангенс которого равен x. Главная ветвь* арктангенса обозначается $\operatorname{arctg} x$. Справедливо равенство: $\operatorname{Arctg} x = \pi n + \operatorname{arctg} x$, причем $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$.

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ определена для всех вещественных x, *однозначна*, *возрастает* от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ с возрастанием x от $-\infty$ до $+\infty$ и *нечетная*, т. е. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

4. Функция, обратная $\operatorname{ctg} x$, называется *арккотангенсом* и обозначается так:

$$y = \operatorname{Arcctg} x.$$

Арккотангенс x есть угол (или число), котангенс которого равен x. Главная ветвь арккотангенса обозначается $\operatorname{arcctg} x$. Справедлива формула: $\operatorname{Arcctg} x = \pi n + \operatorname{arcctg} x$, причем $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ определена для всех вещественных x, *однозначна* и *убывает* от π до 0 с возрастанием x от $-\infty$ до $+\infty$.

5. Функции, обратные $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$, называются соответственно *арксекансом* и *арккосекансом* и обозначаются $\operatorname{Arcsec} x$ и $\operatorname{Arccosec} x$. Их *главные ветви* обозначаются $\operatorname{arcsec} x$ и $\operatorname{arccosec} x$ и определены лишь для $|x| \geqslant 1$.

Главные значения удовлетворяют условиям:

$$0 \leqslant \operatorname{arcsec} x \leqslant \pi \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arccosec} x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

6. Функции арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс, арксеканс и арккосеканс называются *обратными тригонометрическими функциями.*

Замечание. Если $\sin\alpha = \sin\beta$, причем α и β—главные значения арксинуса, то обязательно $\alpha = \beta$. То же можно сказать и о других тригонометрических функциях.

21. Сводка формул для обратных тригонометрических функций.

Формулы	При каких x справедливы формулы
$\operatorname{Arcsin} x = \pi n + (-1)^n \arcsin x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$
$\operatorname{Arccos} x = 2\pi n \pm \arccos x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$
$\operatorname{Arctg} x = \pi n + \operatorname{arctg} x$	При всех x
$\operatorname{Arcctg} x = \pi n + \operatorname{arcctg} x$	При всех x
$\sin(\arcsin x) = \cos(\arccos x) = x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$
$\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$
$\sin(\operatorname{arc\,tg} x) = \cos(\operatorname{arc\,ctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	При всех x
$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \cos(\operatorname{arc\,tg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	При всех x
$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$	При всех x
$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{x}$	$x \neq 0$
$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \operatorname{ctg}(\arccos x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$
$\operatorname{tg}(\arccos x) = \operatorname{ctg}(\arcsin x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$-1 \leqslant x < 0$ и $0 < x \leqslant 1$
$\arcsin(-x) = -\arcsin x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$
$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$
$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$	При всех x
$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$	При всех x
$\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$
$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$	При всех x
$\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}$	$0 \leqslant x \leqslant 1$
$\arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2}$	$0 \leqslant x \leqslant 1$

Формулы	При каких x справедливы формулы
$\arcsin x = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$
$\arccos x = \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$
$\arcsin x = \operatorname{arc\,ctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$0 < x \leqslant 1$
$\arccos x = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$0 < x \leqslant 1$
$\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,ctg} \frac{1}{x}$	$x > 0$
$\operatorname{arc\,ctg} x = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$	$x > 0$
$\operatorname{arc\,tg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	При всех x
$\operatorname{arc\,tg} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \geqslant 0$
$\operatorname{arc\,ctg} x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \geqslant 0$
$\operatorname{arc\,ctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	При всех x
$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$	$\lvert x\rvert \leqslant 1, \lvert y\rvert \leqslant 1$ и $xy \leqslant 0$ или $x^2 + y^2 \leqslant 1$
$\arcsin x + \arcsin y = \pi - \arcsin (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$	$0 < x \leqslant 1,\ 0 < y \leqslant 1$ и $x^2 + y^2 > 1$
$\arcsin x + \arcsin y = -\pi - \arcsin (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$	$-1 \leqslant x < 0,\ -1 \leqslant y < 0$ и $x^2 + y^2 > 1$
$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}$	$xy < 1$
$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}$	$x > 0$ и $xy > 1$
$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = -\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}$	$x < 0$ и $xy > 1$

Примеры. 1. Вычислить $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)$.

Решение. $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\sqrt{\frac{1+\cos(\arcsin x)}{2}}=$

$=\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}}=\sqrt{\frac{x^2}{2(1-\sqrt{1-x^2})}}=\frac{|x|}{\sqrt{2(1-\sqrt{1-x^2})}}.$

2. Вычислить $\operatorname{arc\,tg}2+\operatorname{arc\,tg}3$.

Решение. $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}2+\operatorname{arc\,tg}3)=\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}2)+\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}3)}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}2)\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}3)}=$

$=\frac{2+3}{1-2\cdot3}=-1;\ \operatorname{arc\,tg}2+\operatorname{arc\,tg}3=k\pi-\frac{\pi}{4}.$

Так как $\frac{\pi}{4}<\operatorname{arc\,tg}2<\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{4}<\operatorname{arc\,tg}3<\frac{\pi}{2}$,

то $\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg}2+\operatorname{arc\,tg}3<\pi$ и k может быть равно только 1.

Отсюда

$$\operatorname{arc\,tg}2+\operatorname{arc\,tg}3=\frac{3}{4}\pi.$$

3. Доказать равенство:

$$\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}.$$

Доказательство.

$$\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}\right)=\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)+$$

$$+\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\times\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)=\frac{4}{5}\sqrt{1-\frac{25}{169}}+$$

$$+\sqrt{1-\frac{16}{25}}\cdot\frac{5}{13}=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{63}{65}.$$

Отсюда $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}=\pi n+(-1)^n\arcsin\frac{63}{65}$.

Но $0<\arcsin\frac{4}{5}<\frac{\pi}{3}$, $0<\arcsin\frac{5}{13}<\frac{\pi}{6}$,

$0<\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}<\frac{\pi}{2}$ и $0<\arcsin\frac{63}{65}<\frac{\pi}{2}$.

Поэтому n может равняться только нулю. Итак,

$$\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}=\arcsin\frac{63}{65}=$$

$$=\arccos\sqrt{1-\left(\frac{63}{65}\right)^2}=\arccos\frac{16}{65}.$$

Следовательно,

$$\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\arccos\frac{16}{65}+\arcsin\frac{16}{65}=$$

$$=\frac{\pi}{2}.$$

22. Графики прямых тригонометрических функций (рис. 93—98).

23. Графики обратных тригонометрических функций (рис. 99—104).

§ 7. Таблицы натуральных тригонометрических величин

24. Натуральные таблицы. Таблица VIII четырехзначных таблиц В. М. Брадиса дает возможность найти приближенное значение синуса и косинуса острого угла, выраженного в градусах. В ней даны значения этих величин через каждые 6′. Таблица IX дает значения тангенса и котангенса через каждые 6′ для углов от 0° до 76°, а таблица X — через 1′ для углов от 76° до 89°59′.

25. Отыскание значения тригонометрической функции по углу. 1. Найдем $\sin 12°33'$. В столбце таблицы VIII, обозначенном сверху буквой А, находим 12° и двигаемся по строке, в которой находится число 12°, до пересечения ее со столбцом, обозначенным сверху числом 33′, а если его нет, то ближайшим меньшим к 33′. Такое число будет 30′. На пересечении указанных строки и столбца стоит число 2164. Это значит, что $\sin 12°30' = 0{,}2164$. Но у нас угол содержит не 30′, а 33′. Поправку на 3′ надо взять из столбца поправок (три крайних правых столбца), обозначенного сверху числом 3′, на пересечении его с той же строкой. Там стоит число 9 (десятитысячных). Так как синус острого угла возрастает с возрастанием угла, то поправку нужно прибавить к значению $\sin 12°30'$, что даст $\sin 12°33' = 0{,}2173$.

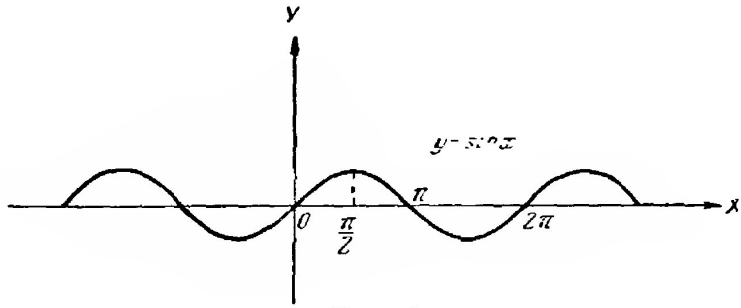

Рис. 93.

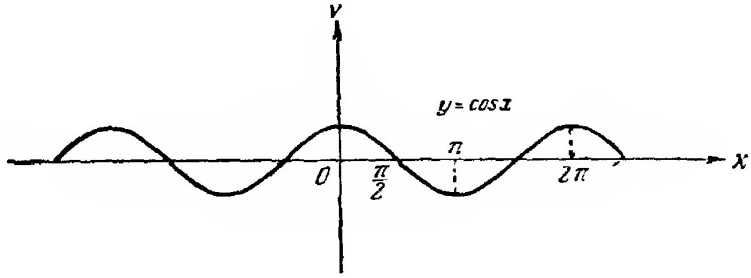

Рис. 94

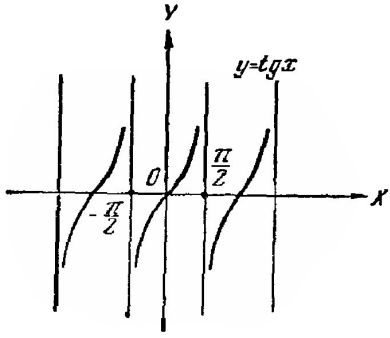

Рис. 95.

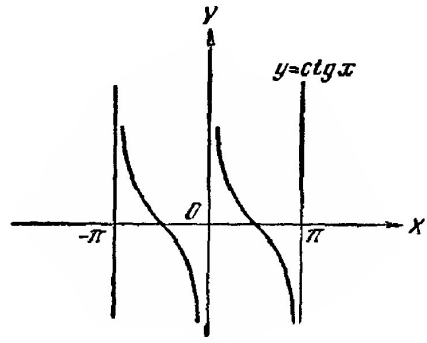

Рис. 96.

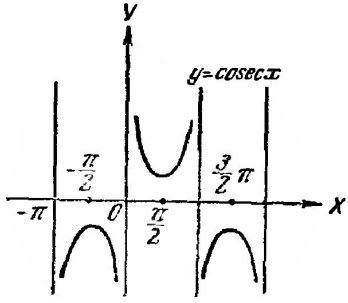

Рис. 97.

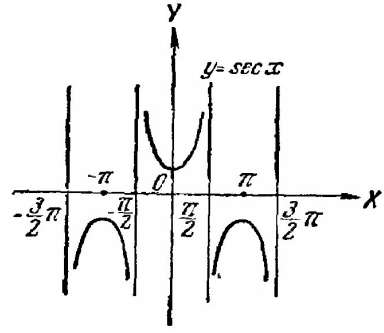

Рис. 98.

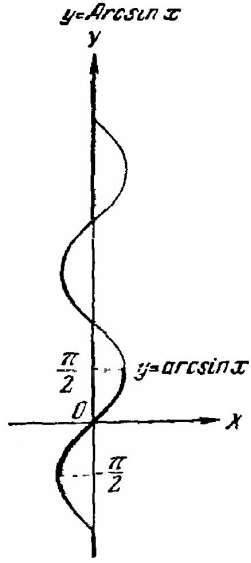

Рис. 99.

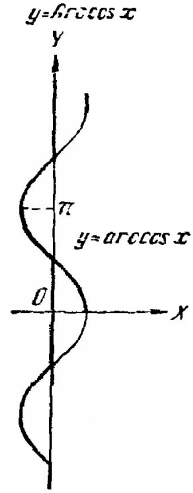

Рис. 100.

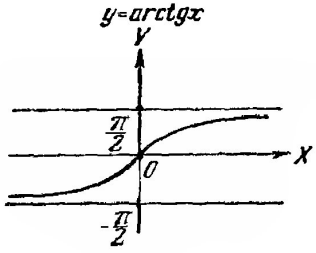

Рис. 101.

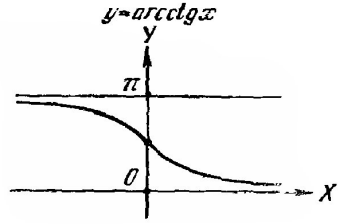

Рис. 102.

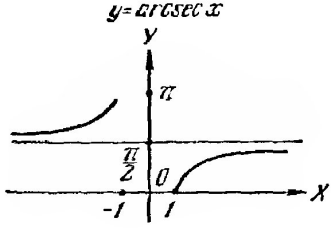

Рис. 103.

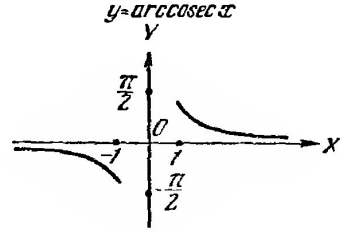

Рис. 104.

Запись:

$$\begin{array}{r} \sin 12^\circ 30' = 0{,}2164 \\ +3' \qquad +9 \\ \hline \sin 12^\circ 33' = 0{,}2173 \end{array}$$

Поправку на 3′ можно было бы найти также методом интерполяции (см. гл. III, п. 114).

2. Найдем $\cos 25^\circ 50'$. Для разыскания косинуса по данному углу поступаем так же, как при разыскании синуса, только число градусов нужно искать в столбце, обозначенном снизу буквой А, число минут смотреть внизу и поправку *вычитать*, так как косинус убывает с возрастанием острого угла.

Запись:

$$\begin{array}{r} \cos 25^\circ 48' = 0{,}9003 \\ +2' \qquad -3 \\ \hline \cos 25^\circ 50' = 0{,}9000 \end{array}$$

3. Отыскание значения тангенса и котангенса по данному углу находится по таблицам IX и X так же, как значения синуса и косинуса по таблице VIII. При этом для тангенса поправка прибавляется, а для котангенса вычитается,

26. Отыскание угла по данному значению тригонометрической функции. 1. Для решения этой задачи применяются те же таблицы.

2. Найдем острый угол x, если $\operatorname{tg} x = 0{,}3103$. Угол $x < 76^\circ$.

Поэтому пользуемся таблицей IX. В этой таблице ищем число 3103, а если такого нет, то ближайшее к нему меньшее. Таким числом будет 3079. Ему соответствует угол 52°36′. Число 3103 отличается от найденного на 24. Поправку в 3′ находим для него в той же строке и в крайнем правом столбце поправок. Ее нужно прибавить к углу 52°36′.

Итак,

$$\begin{array}{r} 0{,}3079 = \operatorname{tg} 52^\circ 36' \\ +24 \qquad +3' \\ \hline 0{,}3103 = \operatorname{tg} 52^\circ 39' \\ x = 52^\circ 39' \end{array}$$

§ 8. Таблицы логарифмов тригонометрических величин

27. Таблицы для синусов и косинусов. Для отыскания логарифмов синусов и косинусов острых углов и для решения обратной задачи служат таблицы III и IV В. М. Брадиса. Таблица III содержит логарифмы синусов и косинусов для углов от $0°\,01'$ до $14°$ через $1'$, а таблица IV — для углов от $14°$ до $90°$ через $6'$.

28. Таблицы для тангенсов и котангенсов. Для отыскания логарифмов тангенсов и котангенсов острых углов и для решения обратной задачи служат таблицы V, VI и VII В. М. Брадиса. Таблица V содержит логарифмы тангенсов и котангенсов для углов от $0°\,01'$ до $14°$ через $1'$, таблица VI — для углов от $14°$ до $76°$ через $6'$ и таблица VII — для углов от $76°$ до $89°\,59'$ через $1'$.

29. Правила пользования таблицами. Правила пользования таблицами такие же, как и для таблиц натуральных тригонометрических величин (см. гл. V, п. п. 25 и 26).

Примеры. 1. Найти $\lg \cos 34°\,20'$.

Решение. Пользуемся таблицей IV, причем число градусов ищем справа, а число минут — внизу. Получим:

$$\begin{array}{rr} \lg \cos 34°\,18' = 0{,}9170 \\ +2' \qquad -2 \\ \hline \lg \cos 34°\,20' = 0{,}9168 \end{array}$$

2. Найти острый угол x, если $\lg \operatorname{tg} x = 0{,}3189$.

Решение. Пользуемся таблицей VI. Поправку находим интерполяцией:

$$\begin{array}{rr} 0{,}3176 = \lg \operatorname{tg} 64°\,18' \\ +13 \qquad +4' \\ \hline 0{,}3189 = \lg \operatorname{tg} 64°\,22' \end{array}$$

$$x = 64°\,22'$$

§ 9. Тригонометрические уравнения

30. Общие сведения. 1. Уравнение называется *тригонометрическим*, если неизвестная величина находится под знаком тригонометрической функции.

Пример. Следующие уравнения являются тригонометрическими: $\sin x = \sin 2x$; $\arcsin 3x = 0{,}5$; $\log_{\cos x} \sin x = 1$; $x \sin x = 0$.

2. Понятия *решения* уравнения, *эквивалентности* уравнений и другие основные понятия, относящиеся к уравнениям и *системам*, изложенные в § 12 гл. III, справедливы и для тригонометрических. Методами элементарной математики могут быть решены лишь некоторые частные случаи тригонометрических уравнений, примеры которых и будут рассмотрены далее.

3. Чтобы решить тригонометрическое уравнение, часто приходится преобразовывать одну или обе части его. При этом не всегда уравнение, получающееся в результате преобразования, эквивалентно данному. Особенно нужно следить за тем, чтобы *не потерять* корни. Что касается появления *посторонних*, то они всегда могут быть выявлены проверкой, путем подстановки найденных корней в данное уравнение. В частности, при решении уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции, часто приходится брать синусы (или косинусы, тангенсы и т. д.) от обеих частей уравнения. При этом следует иметь в виду, что уравнения $A = B$ и $\sin A = \sin B$, вообще говоря, не эквивалентны. Действительно, если $\sin A = \sin B$, то $A = \pi n + (-1)^n B$ и только при $n = 0$ оно дает $A = B$. Впрочем, может оказаться, что только $n = 0$ и дает решение, и тогда рассматриваемые уравнения будут эквивалентными.

31. Уравнения, содержащие неизвестное под знаком прямых тригонометрических функций. 1. Решим уравнение: $\sin 6x = \frac{1}{2}$.

$$6x = \pi n + (-1)^n \frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{\pi n}{6} + \frac{(-1)^n \pi}{36}.$$

2. Решим уравнение:

$$\cos^2 3x = \frac{1}{2}.$$

$$3x = \pi n \pm \frac{\pi}{4}; \quad x = \frac{\pi n}{3} \pm \frac{\pi}{12}.$$

Замечание. Общий вид углов, удовлетворяющих уравнению $\sin^2 x = A$, или $\cos^2 x = A$, или $\operatorname{tg}^2 x = A$, или $\operatorname{ctg}^2 x = A$, можно записать в форме $x = \pi n \pm \alpha$, где α — какое-либо решение соответствующего уравнения. Это вытекает из того факта, что квадрат любой тригонометрической (прямой) функции есть функция четная и периодическая с периодом, равным π.

3. Решим уравнение: $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{ctg} x$.

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad 3x = \pi n + \frac{\pi}{2} - x,$$

$$4x = \frac{2n+1}{2}\pi, \quad x = \frac{2n+1}{8}\pi.$$

4. Если уравнение содержит неизвестное только под знаком одной тригонометрической функции, то, обозначив функцию буквой, получим уравнение относительно этой буквы. Если методами алгебры его можно решить, то в результате получатся уравнения вида: $\sin x = A$ (или $\cos x = A$, $\operatorname{tg} x = A$ и т. д.), которые рассмотрены выше.

Решим уравнение: $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$.

Полагаем: $\sin x = y$. Получим: $y^2 - 3y + 2 = 0$. Отсюда $y_1 = 1$, $y_2 = 2$. Второе решение не годится, так как $|\sin| \leqslant 1$. Первое дает $\sin x = 1$, $x = 2\pi n + \frac{\pi}{2} = \frac{4n+1}{2}\pi$.

5. Когда неизвестное находится под знаком различных тригонометрических функций, то, выразив их через какую-нибудь одну, придем к случаю, рассмотренному выше.

Решим уравнение: $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.

$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 2$ ($x = n\pi$, обращающие $\operatorname{tg} x$ в нуль не удовлетворяют уравнению). Отсюда $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1 = 0$, $\operatorname{tg} x = 1$, $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$.

6. Если неизвестное находится под знаком различных тригонометрических функций и относительно них уравнение рационально, то его всегда можно привести к уравнению, содержащему только одну функцию $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, рациональному относительно нее. Это вытекает из того факта, что все тригонометрические функции аргумента x выражаются рационально через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (см. п. 17).

Однако если уравнение имеет корни вида $x = (2n+1)\pi$, то они таким способом не будут найдены, так как в этом случае $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ теряет смысл.

Решим уравнение: $\sin x + \cos x = 1$.

$$\sin x = \frac{2y}{1+y^2}, \quad \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2},$$

где $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Поэтому $\frac{2y}{1+y^2} + \frac{1-y^2}{1+y^2} = 1$, $2y + 1 - y^2 = 1 + y^2$,

$$y^2 - y = 0, \; y_1 = 0, \; y_2 = 1.$$

Отсюда

а) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$, $\frac{x}{2} = n\pi$, $x_1 = 2n\pi$;

б) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$, $\frac{x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{4}$, $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$.

Потери корней не произошло, так как $x = (2n+1)\pi$ не удовлетворяет уравнению.

Это же уравнение можно было бы решить, выразив $\cos x$ через $\sin x$. Тогда получили бы: $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$.

Обозначив $\sin x = y$, получим иррациональное уравнение $y \pm \sqrt{1-y^2} = 1$. Решив последнее, найдем: $y_1 = 0$, $y_2 = 1$. Отсюда

а) $\sin x = 0$, $x_1 = n\pi$; б) $\sin x = 1$, $x_2 = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$.

Однако при решении иррационального уравнения приходилось его почленно возводить в квадрат, и поэтому найденные корни нужно проверить на предмет выявления посторонних. Нетрудно видеть, что при $n = 2k+1$ корни $x_1 = n\pi$ не удовлетворяют уравнению, так как в этом случае $\sin x + \cos x = 0 - 1 \neq 1$. Остальные — удовлетворяют. Итак, $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$.

7. Приведем несколько примеров решения уравнений, не охваченных предыдущими пунктами:

а) $2\sin^2 x - 3\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

Это уравнение *однородное* относительно $\sin x$ и $\cos x$. Разделим все члены его на $\cos^2 x$ ($\cos x \neq 0$). Получим:

$$2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 1 = 0, \; \operatorname{tg} x = \frac{3 \pm 1}{4}, \; \operatorname{tg} x_1 = 1, \; \operatorname{tg} x_2 = \frac{1}{2},$$

$$x_1 = n\pi + \frac{\pi}{4}, \; x_2 = n\pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}.$$

б) $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}$.

Воспользовавшись формулой:

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right],$$

получим:

$$\frac{1}{2}\left(\cos 2x - \cos 4x\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos 2x - \cos 4x = 1,$$

$$\cos 2x - (1 + \cos 4x) = 0, \quad \cos 2x - 2\cos^2 2x = 0,$$

$$\cos 2x(1 - 2\cos 2x) = 0.$$

Отсюда

$$\cos 2x_1 = 0, \quad 2x_1 = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}, \quad x_1 = n\pi \pm \frac{\pi}{4}; \quad \cos 2x_2 = \frac{1}{2},$$

$$2x_2 = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad x_2 = n\pi \pm \frac{\pi}{6}.$$

в) $\sin 3x = \cos x - \sin x$.

Переносим $\sin x$ из правой части равенства в левую и затем приводим выражение в левой части к виду, удобному для логарифмирования. Получим: $\sin 3x + \sin x = \cos x$,

$2\sin 2x \cos x = \cos x$, $\cos x(2\sin 2x - 1) = 0$, $\cos x_1 = 0$,

$$x_1 = \frac{2n+1}{2}\pi; \quad \sin 2x_2 = \frac{1}{2}, \quad 2x_2 = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6},$$

$$x_2 = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12}.$$

г) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$.

Введем вспомогательный угол с помощью равенства:

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Получим: $\sin x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cos x = 0$,

$$\frac{\sin x \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = 0, \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0,$$

$$x + \frac{\pi}{3} = n\pi, \quad x = n\pi - \frac{\pi}{3}.$$

д) Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{4} \\ x + y = \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

Пользуясь формулой: $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$,

получим: $\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 2y}{2} = \frac{3}{4}$, $\cos 2x + \cos 2y = \frac{1}{2}$,

$2\cos(x+y)\cos(x-y) = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{12}\cos(x-y) = \frac{1}{4}$,

$$\cos(x-y) = \frac{1}{4\cos\frac{5\pi}{12}} = \frac{1}{4\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{1}{4\sin\frac{\pi}{12}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{12}}{4\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\cos\frac{\pi}{12}}{2\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\cos\frac{\pi}{12}}{2\cdot 0{,}5} = \cos\frac{\pi}{12}.$$

Итак, $\cos(x-y) = \cos\frac{\pi}{12}$ и $x - y = 2n\pi \pm \frac{\pi}{12}$.

Решив систему: $x + y = \frac{5\pi}{12}$, $x - y = 2n\pi \pm \frac{\pi}{12}$,

найдем: $x_1 = y_2 = \frac{4n+1}{4}\pi$, $y_1 = x_2 = \frac{1-6n}{6}\pi$.

32. Уравнения, содержащие неизвестное под знаком обратных тригонометрических функций.

1. Решим уравнение: $2\arcsin x = \pi$.

$\arcsin x = \frac{\pi}{2}$, $\sin(\arcsin x) = \sin\frac{\pi}{2}$, $x = 1$.

2. Решим уравнение: $2\arcsin x + \arccos x = 4$.

Так как

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, то $2\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} +$

$+ \arcsin x = 4$.

Отсюда $\arcsin x = 4 - \frac{\pi}{2}$. Но $4 - \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{2}$, $|\arcsin x| \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, уравнение не имеет решений.

3. Решим уравнение: $\arcsin 2x = \arccos 3x$. Возьмем синус от левой и правой сторон уравнения:

$$\sin(\arcsin 2x) = \sin(\arccos 3x).$$

Получим: $2x = \sqrt{1-9x^2}$ (см. п. 21). Решив иррациональное уравнение, найдем: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{13}}$. Второй корень не удовлетворяет уравнению, так как для x отрицательного $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin 2x < 0$, а $\frac{\pi}{2} < \arccos 3x \leqslant \pi$.

Корень $x_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}$ удовлетворяет уравнению, потому что в этом случае синус левой части уравнения равен синусу правой части и равен положительному числу. Но тогда и углы равны, так как это будут положительные острые углы, имеющие равные синусы.

4. Решим уравнение: $\operatorname{arc\,tg}(x-1) + \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}(x+1) = \operatorname{arc\,tg} 3x$.

Перенося второй член из левой части уравнения в правую и взяв тангенс от обеих частей уравнения, получим, воспользовавшись формулой $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}\alpha) = \alpha$.

$$\frac{x-1+x+1}{1-(x-1)(x+1)} = \frac{3x-x}{1+3x\cdot x}.$$

Отсюда $2x(4x^2-1) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{2}$.

Легко проверить, что все найденные значения x удовлетворяют данному уравнению.

Замечание. При тех способах, которые были применены в предыдущих задачах, проверять найденные значения корней нужно *обязательно* (см. п. 30).

§ 10. Решение треугольников

33. Задача решения треугольников. Треугольник имеет стороны, углы, высоты, биссектрисы, медианы и т. д., которые называются *элементами треугольника*. В частности, его стороны и углы называются *основными элементами*. *Задача решения треугольников* состоит в вычислении различных его элементов по достаточному числу данных его элементов. При этом, если специально не указано в задаче, какие элементы нужно определить, ограничиваются вычислением только основных элементов. Если среди трех данных элементов треугольника имеются только основные, то такой случай решения треугольника называется *основным*. С помощью трех основных элементов, если это не три угла, можно определить остальные три элемента. С помощью же основных элементов, в случае надобности, можно определить и любые неосновные, если воспользоваться подходящими формулами геометрии и тригонометрии.

Неосновными (или особыми) *случаями* решения треугольников называются такие, когда среди трех данных его элементов хотя бы один не является основным.

34. Основные случаи решения прямоугольных треугольников. Один из углов прямоугольного треугольника равен $\frac{\pi}{2}$. Значит, один из основных элементов всегда известен, и достаточно задать только два основных элемента, из которых один или оба не являются углами.

Основных случаев решения прямоугольных треугольников четыре. Если обозначить катеты через a и b, гипотенузу через c, а противолежащие им углы соответственно через A, B и C, то эти случаи можно объединить в следующую таблицу:

Данные элементы	Искомые элементы	Значения искомых элементов
c, A	a, b, B	$a = c \sin A$, $b = c \cos A$, $B = \frac{\pi}{2} - A$
a, A	b, c, B	$b = a \operatorname{ctg} A$, $c = \frac{a}{\sin A}$, $B = \frac{\pi}{2} - A$
a, c	b, A, B	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$, $A = \arcsin \frac{a}{c}$, $B = \frac{\pi}{2} - A$
a, b	c, A, B	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $A = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$, $B = \frac{\pi}{2} - A$

Замечание. Эти результаты вытекают из того, что тригонометрические функции угла A прямоугольного треугольника можно определить так: $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$, $\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}$, $\sec A = \frac{c}{b}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}$. При этом, как и в дальнейшем, под a, b, c, A, B понимаются как сами элементы, так и их меры (численные значения).

35. Некоторые теоремы и формулы, используемые при решении треугольников. 1. Во всяком треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих им углов (*теорема синусов*), т. е.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где a, b, c — стороны треугольника; A, B, C — противолежащие им углы; R — радиус описанной около треугольника окружности.

2. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними *(теорема косинусов)*, т. е.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

С помощью этой формулы можно получить следующие три для определения угла треугольника по его сторонам:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

где p — полупериметр треугольника.

Анологичные формулы можно написать для b, c, B, C.

3. Сумма двух сторон треугольника так относится к их разности, как тангенс полусуммы противолежащих им углов к тангенсу полуразности этих углов *(теорема тангенсов)*, т. е.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}.$$

4. Сумма двух сторон треугольника так относится к третьей стороне, как косинус полуразности противолежащих им углов к синусу половины угла, противолежащего третьей стороне *(первая формула Мольвейде)*, т. е.

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}.$$

Справедлива также *вторая формула Мольвейде:*

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}.$$

5. Обозначения: h_a, m_a, β_a — высота, медиана и биссектриса треугольника, проведенные из вершины A; p, S —

полупериметр и площадь треугольника; r — радиус вписанного в треугольник круга.

$$h_a = c\sin B = b\sin C = 2R\sin B\sin C;$$

$$m_a = R\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A};$$

$$\beta_a = \frac{c\sin B}{\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{b\sin C}{\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{2R\sin B\sin C}{\cos\frac{B-C}{2}};$$

$$p = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2};$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B =$$

$$= 2R^2\sin A\sin B\sin C;$$

$$r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2} =$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

36. Основные случаи решения косоугольных треугольников.

1. Дано: a, B, C. Найти: A, b, c.

$A = \pi - B - C$. Стороны b и c находим с помощью теоремы синусов: $b = \frac{a\sin B}{\sin A}$, $c = \frac{a\sin C}{\sin A}$.

Если $B + C < \pi$, то решение единственное. В противном случае задача не имеет решения.

2. Дано: a, b, C. Найти: A, B, c.

а) Углы A и B найдутся, если воспользоваться равенством $A + B = \pi - C$ и теоремой тангенсов. Последняя дает $\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$. Поэтому для определения A и B получим систему: $\begin{cases} A + B = \pi - C \\ A - B = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right). \end{cases}$

Сторона c определяется по теореме синусов: $c = \frac{a\sin C}{\sin A}$.

Этот способ решения применяют в том случае, когда пользуются таблицами логарифмов тригонометрических величин.

б) Если пользуются таблицей натуральных тригонометрических величин, то удобно сторону c находить с помощью теоремы косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$. Далее, если $a \leqslant b$, то по теореме синусов находим $\sin A = \frac{a\sin C}{c}$ и берем для угла A положительное значение,

меньшее $\frac{\pi}{2}$. Угол $B = \pi - C - A$. Если $a > b$, то определяем по теореме синусов B, а A — из соотношения $A + B + C = \pi$.

Задача всегда имеет решение, и при том единственное, если $0 < C < \pi$.

3. Дано: a, b, c. Найти: A, B, C.

Углы определяются с помощью теоремы косинусов.

Если бóльшая из трех данных сторон меньше суммы двух других, то задача имеет единственное решение. В противном случае решения нет.

4. Дано: a, b, B. Найти: c, A, C.

а) Если $a > b$ и $a \sin B > b$, то задача не имеет решения.

б) Если $a > b$ и $a \sin B = b$, то треугольник единственный $\left(A = \frac{\pi}{2}\right)$.

в) Если $a > b$ и $a \sin B < b$, то задача имеет два решения.

г) Если $a \leqslant b$, то решение единственное, причем угол A — острый.

Угол A определяется по теореме синусов: $\sin A = \frac{a \sin B}{b}$. Далее вычисления ведутся, как во втором случае.

§ 11. Разные формулы

37. Площадь проекции плоской фигуры. Площадь проекции фигуры S (рис. 105), расположенной в плоскости P, на плоскость Q равна произведению площади S на косинус угла между плоскостями P и Q, т. е. пл. $S_1 =$ пл. $S \cos \varphi$.

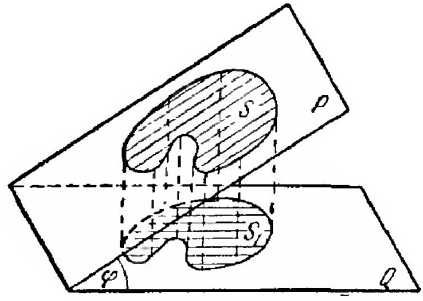

Рис. 105.

38. Сравнение угла с синусом и тангенсом этого угла. Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Но $\sin x < x$ При всех $x > 0$.

Глава шестая

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЮ ИХ ГРАФИКОВ

§ 1. Предел функции

1. Предел переменной. 1. Число a называется *пределом переменной* x (п. 119, гл. III) если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое значение x_ε этой переменной, что все значения x, следующие за x_ε, удовлетворяют неравенству $|x - a| < \varepsilon$.

Тот факт, что переменная x имеет предел a, обозначают символом $\lim x = a$ или $x \to a$ и словами кратко выражают так: *x стремится к a.*

2. Данное определение предела переменной x предполагает, что переменная x *упорядочена*, т. е. что дано правило, по которому можно судить, какое из двух любых значений переменной x следует за другим. Кроме того, считается, что множество значений x не имеет последнего элемента, так что для каждого элемента найдется следующий.

Примером упорядоченной переменной может служить последовательность x_n. Действительно, для этого достаточно считать что x_{n_2} следует за x_{n_1}, если $n_2 > n_1$. Сформулированное в п. 92, гл. III определение предела последовательности содержится в данном здесь определении предела переменной величины как частный случай. Чтобы в этом убедиться, достаточно взять за x_ε любое x_n, у которого $n > N$.

Если множество значений x есть промежуток, то множество естественно упорядочить, расположив значения в порядке их возрастания, т. е. считая, что x' предшествует x'', если $x' < x''$.

3. Переменная, имеющая пределом нуль называется *бесконечно малой*. Число нуль также *рассматривают* как бесконечно малую.

Переменная x называется *бесконечно большой*, если для любого $E > 0$ существует такое значение x_E этой переменной, что все значения x, следующие за x_E, удовлетворяют неравенству $|x| > E$.

Это записывают так: $\lim x = \infty$, или $x \to \infty$, или $|x| \to +\infty$.

4. Так как в математике и ее приложениях приходится иметь дело главным образом с переменными, зависящими от других переменных, т. е. с функциями, то дальнейшие сведения, относящиеся к пределам, будут изложены ниже в связи с пределами функций.

2. Предел функции. 1. *Окрестностью точки (числа)* a называется любой открытый промежуток $(a-\delta, a+\delta)$. Таким образом, окрестность точки a есть множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a-\delta < x < a+\delta$.

2. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки a, *за исключением*, быть может, самой точки a. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* x, *стремящемся к* a (или *в точке* a), если для любого $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta > 0$, что из неравенств $0 < |x-a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Это записывают так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Поясним определение предела геометрически. Пусть график функции $y = f(x)$ вблизи точки $x = a$ будет такой, как изображено на рисунке 106, и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Нужно показать, что по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x-a| < \delta$, соответствующие значения функции будут удовлетворять неравенству $|f(x) - A| < \varepsilon$. Отложим вверх по оси ординат, считая от начала, отрезки $OM = A - \varepsilon$ и $OK = A + \varepsilon$ и проведем $KL \parallel OX$ и $MN \parallel OX$. Если P и L — точки пересечения этих прямых с графиком функции, то проек-

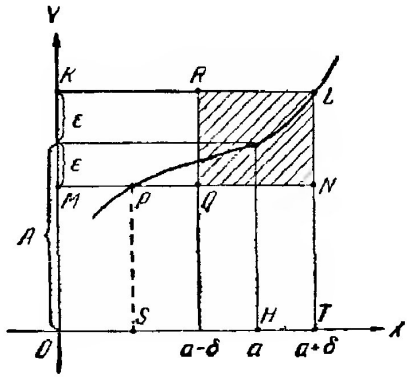

Рис. 106.

ции точек P и L на ось абсцисс определят концы S и T промежутка ST, обладающего тем свойством, что для любого x, взятого из этого промежутка, значения $f(x)$ отличаются от A на величину, которая численно меньше ε. Взяв длину меньшего из отрезков SH и HT за δ, т. е. положив $HT = \delta$, убедимся, что из неравенств $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Пример. Функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ определена для всех $x \neq 0$ и не определена для $x = 0$. Покажем, что она имеет предел при $x \to 0$. Предполагая $0 < x < \frac{\pi}{2}$, воспользуемся неравенствами $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ (п. 38, гл. V). Деля $\sin x$ на каждый из членов этих неравенств и вычитая результаты из единицы, получим: $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$, а так как $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} < 2\sin \frac{x}{2} < 2 \cdot \frac{x}{2} = x$, то найдем: $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x$, или $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x|$. Последнее неравенство справедливо для всех $x \neq 0$, удовлетворяющих соотношению $|x| < \frac{\pi}{2}$, так как $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$. Пусть теперь задано любое $\varepsilon > 0$. Если взять за δ наименьшее из чисел ε и $\frac{\pi}{2}$, то для всех x, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x| < \delta$, будет иметь место неравенство $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$. А это и значит, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

3. Если функция не имеет предела при $x \to a$, то может случиться, что она имеет предел *при стремлении x к a слева* или *справа*. Число A называется *пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a слева*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенств $0 < a - x < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Это записывается так: $A = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $A = f(a - 0)$.

Аналогично формулируется определение предела функции $f(x)$ при x, стремящемся к a справа. Если этот предел есть B, то это записывается так: $B = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $B = f(a + 0)$.

Для того чтобы существовал предел функции $f(x)$ при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы для $f(x)$ при x, стремящемся к a слева и справа, и чтобы они были равны: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$.

На рисунке 107 изображен случай, когда $f(a-0) \neq f(a+0)$.

4. Если функция $f(x)$ определена для сколь угодно больших по абсолютной величине x, то иногда можно говорить о пределе $f(x)$ при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$. Именно

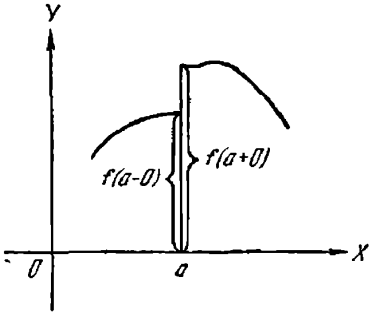

Рис. 107.

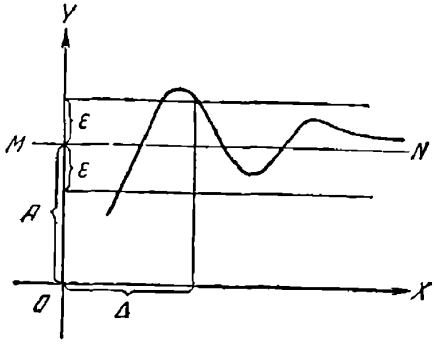

Рис. 108.

число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\Delta > 0$, что из неравенства $x > \Delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Это записывается так: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

Аналогично формулируется определение предела A для функции $f(x)$ при $x \to -\infty$. В этом случае из неравенства $x < -\Delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Геометрическая трактовка равенства $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ дана на рисунке 108, где изображенная кривая есть график функции $f(x)$. Прямая MN, к которой неограниченно приближается график, называется *асимптотой* (*горизонтальной*) графика.

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$, если $0 < a < 1$.

Решение. Чтобы выполнялось неравенство $a^x < \varepsilon$, достаточно взять $x > \log_a \varepsilon$. Таким образом, здесь $\Delta \geqslant \log_a \varepsilon$. Ось абсцисс является асимптотой графика функции $y = a^x$ (рис. 20).

5. Переменная, принимающая значения членов последовательности, является функцией целочисленного аргумента (п. 120, гл. III). Поэтому, положив в определении

предела последовательности (п. 92, гл. III) $x_n = f(n)$ и $N = \Delta$, убедимся, что предел последовательности является частным случаем предела функции при $x \to +\infty$.

6. Может случиться, что при $x \to a$ функция $f(x) \to \infty$. Тогда говорят, что $f(x)$ имеет *бесконечный предел*. Точнее: *функция $f(x)$ имеет пределом ∞ при x, стремящемся к a* (или *в точке a*), если для любого $E > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенств $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x)| > E$.

В этом случае пишут: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Геометрическая трактовка для этого случая дана на рисунке 109, где изображенная кривая есть график функции $y = f(x)$. Прямая MN является *асимптотой (вертикальной)* графика.

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 0} 2^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$.

Решение. Чтобы выполнялось неравенство $2^{\frac{1}{x^2}} > E$, достаточно взять $\frac{1}{x^2} > \log_2 E$ $(E > 1)$. Отсюда $0 < x^2 < \frac{1}{\log_a E}$, $0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{\log_a E}}$.

Таким образом, здесь $\delta \leqslant \frac{1}{\sqrt{\log_a E}}$.

7. Возможны также случаи, когда $f(x) \to \infty$ при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$.

Точные формулировки того, что́ под этим понимается, строятся аналогично сказанному в пп. 2—6.

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, если $a > 1$.

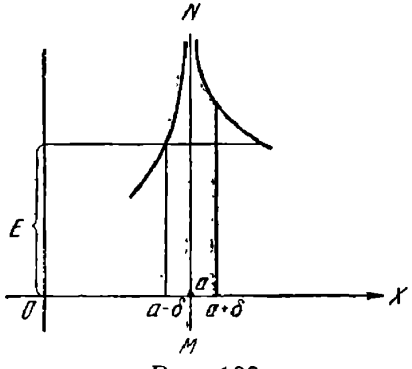

Рис. 109.

Решение. Действительно, для этого нужно, чтобы выполнялось неравенство $a^x > E$, как только $x > \Delta$. Но если $a^x > E$ $(E > 1)$, то $x > \log_a E$.

Поэтому можно положить: $\Delta \geqslant \log_a E$.

Замечание. В дальнейшем под словом «предел» всегда будет пониматься число (а не бесконечность), если только не будет оговорено противное.

3. Теоремы о пределах. 1. Функция не может иметь больше одного предела в данной точке.

2. Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$, то в достаточно малой окрестности точки a она *ограничена*.

Это значит, что существуют такие два числа L и δ, что из неравенств $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x)| < L$.

3. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ равны и одна из них имеет предел A при $x \to a$, то и другая имеет предел A при $x \to a$.

4. Если функция $f(x)$ меньше (больше) функции $\varphi(x)$ и каждая из них имеет предел при $x \to a$, то предел первой не больше (не меньше) предела второй, т. е.

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} \varphi(x) \qquad (\lim_{x \to a} f(x) \geqslant \lim_{x \to a} \varphi(x)).$$

5. Если предел функции $f(x)$ при $x \to a$ положительный (отрицательный), то и сама функция $f(x)$ будет положительная (отрицательная) для всех x достаточно малой окрестности точки a (исключая точку a).

6. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = B$, то $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + \varphi(x)] = A + B$, $\lim\limits_{x \to a} [f(x)\varphi(x)] = AB$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{A}{B}$, причем в последнем случае предполагается, что $B \neq 0$.

Замечание. При сравнении функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ или выполнении над ними арифметических действий мы предполагаем, что их значения соответствуют одному и тому же x и что функции определены в одной и той же области.

Пример. Вычислить: $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 4x - \cos 8x}{x^2}$.

Решение. $\dfrac{\cos 4x - \cos 8x}{x^2} = \dfrac{2 \sin 6x \sin 2x}{x^2} = 24 \cdot \dfrac{\sin 6x}{6x} \cdot \dfrac{\sin 2x}{2x}$. Пользуясь равенством $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$ (п.2, гл. VI), теоремой о пределе произведения и теоремой о равенстве пределов у равных переменных, найдем $L = 24$.

§ 2. Непрерывные функции

4. Непрерывность функции в точке и в промежутке. 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0, *включая* точку x_0. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = x_0$ (или при *значении* $x = x_0$), если

предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$ равен значению функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ (при значении $x = x_0$), т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Или кратко (но менее точно): *предел функции равен функции от предела.*

В определении непрерывности функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ содержатся три требования: существование предела A фуикции $f(x)$ при $x \to x_0$; существование значения $f(x_0)$ функции $f(x)$ в точке $x = x_0$; равенство предела и значения функции в точке x_0, т. е. $A = f(x_0)$.

Если для функции $f(x)$ не выполнено в точке x_0 хотя бы одно из перечисленных требований, то говорят, что функция $f(x)$ имеет *разрыв в точке* x_0, а точку $x = x_0$ называют *точкой разрыва* $f(x)$.

Заметим, что в отличие от определения предела функции здесь x, стремясь к x_0, может принимать значение x_0.

Графиком непрерывной функции служит сплошная (непрерывная) кривая.

Пример. Доказать непрерывность функции $f(x) = x^n$ (n — натуральное) при любом вещественном x.

Решение. Действительно, пусть x_0 — любое вещественное число. Тогда, по теореме о пределе произведения

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x^n = \lim_{x \to x_0} \underbrace{(x \cdot x \ldots x)}_{n} = \underbrace{x_0 x_0 \ldots x_0}_{n} = x_0^n = f(x_0).$$

2. Сравнивая определения предела и непрерывности, можно сказать, что для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, при котором из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Пример. Доказать, что функция $f(x) = \sin x$ непрерывна при любом x.

Решение. Пусть задано $\varepsilon > 0$ и x_0 — любое вещественное число. Тогда $|\sin x - \sin x_0| = \left| 2\cos \frac{x + x_0}{2} \times \right.$ $\left. \times \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leqslant 2 \sin \frac{|x - x_0|}{2} < |x - x_0|$, так как $\left|\cos \frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant$ $\leqslant 1$, а $\sin |x| < |x|$ при $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Если положим $\delta \leqslant \varepsilon$, то из неравенства $|x - x_0| < \delta$ будет следовать неравенство $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$.

3. Разность двух значений x и x_0 аргумента называют *приращением аргумента* x в точке x_0 и обозначают Δx_0 или Δx. Таким образом, $\Delta x_0 = x - x_0$. Точно так же говорят *о приращении функции* $y = f(x)$ в точке x_0, полагая $\Delta y_0 = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)$ (рис. 110). Пользуясь этими терминами и определением непрерывности функции, можно сказать, что для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы бесконечно малому приращению Δx_0 аргумента в этой точке соответствовало и бесконечно малое приращение Δy_0 функции.

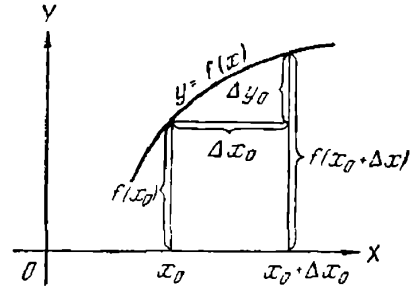

Рис. 110.

Пример. Доказать, что функция $f(x) = \cos x$ непрерывна при любом x.

Решение. Пусть x_0 — любое вещественное число и $\Delta x_0 \to 0$. Пользуясь непрерывностью $\sin x$ (см. предыдущий пример) и теоремой о пределе произведения, получим:

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \Delta y_0 = \lim_{\Delta x_0 \to 0} [\cos(x_0 + \Delta x_0) - \cos x_0] =$$

$$= \lim_{\Delta x_0 \to 0} \left[-2 \sin \left(x_0 + \frac{\Delta x_0}{2} \right) \cdot \sin \frac{\Delta x_0}{2} \right] = -2 \sin x_0 \cdot 0 = 0.$$

4. Если функция непрерывна в каждой точке некоторого промежутка, то она называется *непрерывной в этом промежутке.*

Пример. Доказать, что функции x^n (n — натуральное), $\sin x$, $\cos x$ непрерывны в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Решение. x^n, $\sin x$, $\cos x$ непрерывны при любом вещественном x (см. три предыдущих примера). Отсюда и следует их непрерывность в $(-\infty, +\infty)$.

5. Арифметические операции над непрерывными функциями. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены в одном и том же промежутке и непрерывны в некоторой точке этого промежутка, то в той же точке будут непрерывны и функции $f(x) + \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем для частного $\varphi(x) \neq 0$ в рассматриваемой точке.

Это следует из теорем о пределе суммы, произведения и частного.

Пример. Доказать непрерывность многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Решение. Так как x^k (k — натуральное) и постоянная суть функции непрерывные в промежутке $(-\infty, +\infty)$, то непрерывность многочлена следует из теоремы о непрерывности произведения и суммы непрерывных функций.

6. Непрерывность элементарных функций. 1. Функции: C—постоянная; x^a —степенная; a^x —показательная; $\log_a x$— логарифмическая; $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ — прямые тригонометрические; $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arc tg} x$, $\operatorname{arc ctg} x$ — обратные тригонометрические—называются *основными элементарными функциями*. Каждая из этих функций $f(x)$ имеет свою область определения, являющуюся множеством всех значений x, при которых рассматриваемая операция имеет смысл и выполнение этой операции над x приводят к вещественному числу. Можно доказать, что *каждая основная элементарная функция непрерывна в своей области определения.*

2. Если выполнить операцию какой-либо основной элементарной функции не над аргументом, а над другой или той же основной элементарной функцией, то получится функция, которая называется *сложной элементарной функцией* или *функцией от функции*. Кратко это можно записать так: если $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, то $y = f[\varphi(x)]$ — сложная функция от x. Областью определения сложной функции является множество всех тех значений x, принадлежащих области определения функции $\varphi(x)$, которым соответствуют значения $u = \varphi(x)$, принадлежащие области определения функции $f(u)$.

Величину u называют *промежуточным аргументом* (или *промежуточной функцией*).

Примеры. а) $y = \log_a \sin x$ — сложная функция. Здесь $y = \log_a u$, а $u = \sin x$. Область определения состоит из промежутков $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. В этих промежутках $\sin x > 0$.

б) $y = \arcsin \dfrac{x^2+1}{x^2}$ можно записать в виде $y = \arcsin u$, $u = \dfrac{x^2+1}{x^2}$. Но при любом $x \neq 0$ величина $u > 1$ и, следовательно, данное выражение не определяет функции, как лишенное смысла.

в) $y = \sqrt{\cos^2 x}$ — основная элементарная функция, но

заданная в виде сложной. Действительно, $\sqrt{\cos^2 x}=\cos x$, если $\cos x > 0$, и $\sqrt{\cos^2 x} = -\cos x$, если $\cos x < 0$.

3. *Элементарными функциями* называются основные элементарные функции и функции, которые получаются из основных элементарных с помощью образования сложных функций и арифметических действий, примененных конечное число раз.

При применении арифметических действий область определения новой функции будет являться общей частью областей функций, входящих в новую функцию.

Пример. Найти область определения функции $y = \log_a x + \cos x$.

Решение. Область определения $\log_a x$ — все положительные числа, а $\cos x$ — все вещественные числа. Следовательно, область определения данной функции есть промежуток $(0, +\infty)$.

4. Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в промежутке (a, b), а функция $f(u)$ непрерывна в некотором промежутке, содержащем в себе все значения, принимаемые функцией $\varphi(x)$ в промежутке (a, b), то сложная функция $f[\varphi(x)]$ непрерывна в промежутке (a, b).

Так как основные элементарные функции непрерывны, то на основании этой теоремы и теорем об арифметических действиях над непрерывными функциями следует, что *элементарные функции непрерывны во всех точках, где они имеют смысл, т. е. в их областях определения.*

Пример. Вычислить: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = L$.

Решение. $\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \dfrac{(\sqrt[3]{1+x})^3-1}{x[(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}+1]} = \dfrac{1}{(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}+1}$. Пользуясь непрерывностью функции, стоящей в знаменателе, в точке $x = 0$, и теоремами об арифметических действиях над непрерывными функциями, получим $L = \dfrac{1}{3}$.

7. Некоторые свойства непрерывных функций. 1. Если непрерывная в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ имеет положительное (отрицательное) значение $f(x_0)$ в этой точке, то и сама функция $f(x)$ будет положительной (отрицательной) для всех x достаточно малой окрестности точки x_0.

2. Функция $f(x)$, непрерывная в замкнутом промежутке $[a, b,]$ *ограничена* в этом промежутке.

Это значит, что существуют такие числа m и M, что для всех x промежутка $[a, b]$ выполняются неравенства $m < f(x) < M$.

Число m называется *нижней границей* функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$, а число M — *верхней границей*. Всякое число $m_1 < m$ также будет нижней границей, а всякое число $M_1 > M$ — верхней границей функции $f(x)$. У ограниченной функции $f(x)$ существует *наибольшая из нижних границ* и *наименьшая из верхних границ*. Первая называется *точной нижней*, а вторая — *точной верхней границей* функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$. Не всякая функция достигает своей точной нижней или точной верхней границы, а если достигает, то тогда эти границы называются соответственно *наименьшим* и *наибольшим значением функции* в рассматриваемом промежутке.

Пример. Функция $f(n) = \frac{n}{n+1}$, где $n = 0,1,2, \ldots$, есть множество правильных дробей. Точной верхней границей этой функции является 1. Но этого числа функция не достигает.

3. Среди значений, принимаемых функцией, непрерывной в замкнутом промежутке, существуют наибольшее и наименьшее.

Рисунок 111 иллюстрирует геометрически эту теорему. На нем наибольшее значение функции $f(x)$ есть $M = f(c)$, а наименьшее — $m = f(b)$.

4. Если функция, непрерывная в некотором промежутке, принимает в двух точках этого промежутка значения разных знаков, то между этими точками найдется такая третья точка, в которой рассматриваемая функция обращается в нуль.

Геометрическая трактовка этой теоремы дана на рисунке 112.

Пример. Доказать, что уравнение $x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$ с вещественными коэффициентами имеет вещественный корень.

Решение. Функция $f(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = x^3 \left(1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3}\right)$ имеет положительное значение для достаточно большого $x > 0$ и отрицательное — для $x < 0$, но большого по абсолютной величине. Так как многочлен —

непрерывная функция для всех вещественных x, то, меняя знак, он необходимо обратится в нуль. Доказательство останется в силе и в том случае, когда степень уравнения будет любая нечетная.

5. Если функция $f(x)$ непрерывна в некотором промежутке и в двух точках a и b этого промежутка прини-

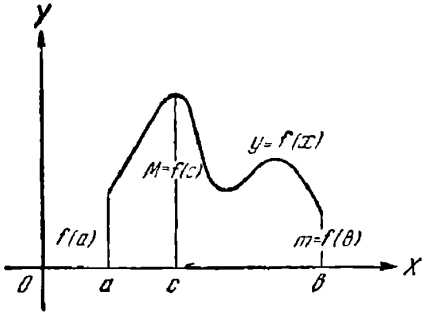

Рис. 111.

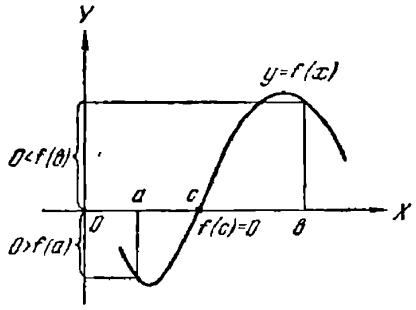

Рис. 112.

мает значения A и B, то, каково бы ни было число C, заключенное между A и B, найдется такая точка $x = c$, между a и b, что $f(c) = C$.

Иначе: функция, непрерывная в некотором промежутке, не может перейти от одного своего значения к другому, не приняв любого промежуточного значения (см. рис. 113).

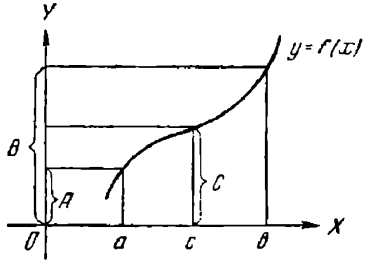

Рис. 113.

Используя это свойство, можно доказать, что если функция $y = f(x)$ непрерывная и возрастающая (убывающая) в промежутке $[a, b]$, то в соответствующем промежутке $[f(a), f(b)]$ существует обратная ей функция $x = f(y)$, тоже возрастающая (убывающая) и непрерывная.

Пример. Функция $y = \sin x$ непрерывная (п. 4, гл. VI) и возрастающая в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно, в промежутке $[-1, 1]$ существует обратная ей функция $x = \sin y$, которая в этом промежутке возрастает и непрерывна. Эту функцию обозначают: $y = \arcsin x$ (п. 20, гл. V).

§ 3. Производная

8. Определение производной. 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке (a, b). Возьмем какую-нибудь точку $x = x_0$ этого промежутка и вычислим значение $y_0 = f(x_0)$ функции $f(x)$ в этой точке. Придадим x_0 приращение $\Delta x \neq 0$, причем такое, чтобы точка $x = x_0 + \Delta x$ также принадлежала промежутку (a, b). Тогда и функция $f(x)$ изменит свое значение $y_0 = f(x_0)$ на новое $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$, получив приращение $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ и устремим $\Delta x \to 0$. Если при $\Delta x \to 0$ существует предел этого отношения, то он называется *производной функции* $f(x)$ по аргументу x *в данной точке* (или *при данном значении*) $x = x_0$ и обозначается так: y', или y'_x, или $f'(x_0)$, или $\frac{dy}{dx}$.

Итак, по определению,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Поэтому можно сказать, что *производной функции по аргументу в данной точке называется предел отношения приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента в этой точке, когда последнее стремится к нулю.*

2. Функция, имеющая производную в некоторой точке, называется *дифференцируемой в этой точке.*

Если функция дифференцируема в каждой точке промежутка, то она называется *дифференцируемой в этом промежутке.*

Действие отыскания производной функции называется *дифференцированием* функции. Учение о правилах дифференцирования и свойствах производных называется *дифференциальным исчислением.*

Пример. Найти производную функции $y = Ax^2$; где A — постоянная.

Решение. $y = Ax^2$, $y + \Delta y = A \cdot (x + \Delta x)^2$, $\Delta y = A \cdot (x + \Delta x)^2 - Ax^2 = A(2x + \Delta x)\Delta x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2Ax + A\Delta x$, $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2Ax + \Delta x) = 2Ax$.

9. Скорость в данный момент. Пусть точка M (рис. 114) движется по прямой. Будем предполагать, что на прямой указано положительное направление и выбраны начальная точка O и единица длины. Положение точки на прямой будет определяться расстоянием $OM = s$, которое соответствует некоторому моменту времени t, т. е. числу единиц времени, протекшего от начального момента. Если задана функция $s = f(t)$, с помощью которой можно определить положение точки для любого момента времени, то движение считается заданным, а уравнение $s = f(t)$, называется *уравнением движения*.

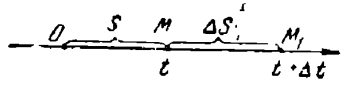

Рис. 114.

Итак, пусть в момент t точка находилась в положении M, на расстоянии $OM = s$. Рассмотрим момент $t + \Delta t$, когда точка находится в положении M_1 на расстоянии $OM_1 = s + \Delta s = f(t + \Delta t)$ от точки O. За время Δt точка прошла расстояние Δs со средней скоростью $V_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$. С изменением промежутка времени Δt средняя скорость, вообще говоря, будет меняться, и, чем меньше будет Δt, тем она лучше будет характеризовать состояние движущейся точки. Предел средней скорости за промежуток времени Δt, когда Δt стремится к нулю, называется *скоростью точки в данный момент* t.

Итак, $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{ср} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

С другой стороны, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'_t$. Поэтому можно сказать, что *скорость движущейся точки в данный момент есть производная от пути по времени.*

Пример. Найти скорость свободного падения тяжелой материальной точки в пустоте.

Решение. Уравнение движения в этом случае имеет вид: $s = \frac{gt^2}{2}$. Пользуясь результатом предыдущего примера, получим: $v = s' = 2 \cdot \frac{g}{2} t = gt$.

10. Касательная к кривой. В элементарной геометрии рассматривается касательная к окружности. Она определяется как прямая, имеющая только одну точку, общую

с окружностью. Это определение было бы нецелесообразно распространить на любую кривую. На самом деле в таком случае ось OY (рис. 115) пришлось бы считать касательной к параболе $y = ax^2$, а прямую AB (рис. 116) — не считать касательной к синусоиде $y = \sin x$. Но это явно противоречит нашему житейскому представлению о касании. В математике принято другое определение касательной, а именно: *касательной к кривой* K (рис. 117)

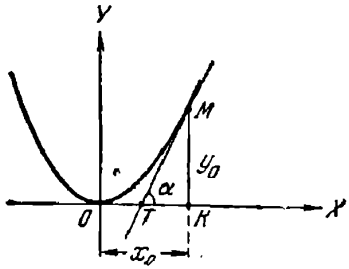

Рис. 115.

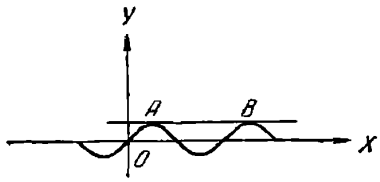

Рис. 116.

в данной точке M *называется предельное положение* MT *секущей* MS, *проходящей через эту точку* M *и какую-либо другую точку* M_1 *кривой, когда эта другая, двигаясь по кривой, стремится к совпадению с первой.*

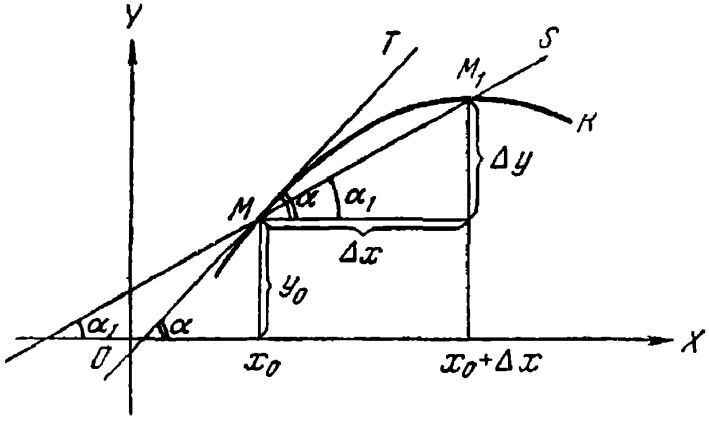

Рис. 117.

Пусть кривая K является графиком функции $y = f(x)$, а точка M имеет координаты x_0, y_0. Так как точка M, через которую прямая проходит, известна, то, для того чтобы положение касательной MT было вполне определено,

достаточно знать угол α наклона ее к оси абсцисс или $\operatorname{tg}\alpha$. Положим, что координаты другой, выбранной нами точки M_1 кривой будут $x_0 + \Delta x$, $y_0 + \Delta y$ и угол наклона секущей MS к оси абсцисс α_1. Очевидно, $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, а так как стремление секущей MS к предельному положению MT означает стремление α_1 к α и Δx к нулю, то получим, используя непрерывность тангенса, что $\operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\alpha_1 \to \alpha} \operatorname{tg}\alpha_1 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Заметим, что *угловым коэффициентом* прямой называется тангенс угла наклона ее к оси. абсцисс. Поэтому можно сказать, что *угловой коэффициент касательной есть производная от ординаты по абсциссе.*

В этом состоит *геометрический смысл производной.*

Пример. Построить касательную к параболе $y = ax^2$ в точке с абсциссой $x = x_0$.

Решение. Найдем ординату $y_0 = ax_0^2$. Тем самым определится точка M (рис. 115) касания. Теперь найдем точку T пересечения касательной с осью абсцисс. Так как $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = 2ax_0$, то из $\triangle MKT$ получим: $TK = \frac{MK}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{y_0}{2ax_0} = \frac{ax_0^2}{2ax_0} = \frac{x_0}{2}$. Отсюда $OT = \frac{x_0}{2}$, $T\left(\frac{x_0}{2}, 0\right)$. Остается провести прямую через две известные точки M и T.

11. Дифференцируемость и непрерывность. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке, то она и непрерывна в этой точке. Действительно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = y' \cdot 0 = 0$. Однако если функция непрерывна, то она может и не быть дифференцируемой. Например, если учесть геометрический смысл производной, то станет понятно, что в точке M (рис. 118) имеет место именно это положение.

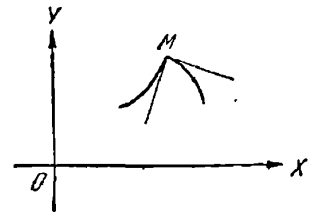

Рис. 118.

12. Сводка производных некоторых функций. В приведенной ниже сводке буквы C, a и n обозначают постоянные.

1. $(C)' = 0$
2. $(x^a)' = ax^{a-1}$
3. $(x)' = 1$
4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
5. $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
6. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
7. $(\sin ax)' = a\cos ax$
8. $(\cos ax)' = -a\sin ax$
9. $(\operatorname{tg} ax)' = \frac{a}{\cos^2 ax}$
10. $(\operatorname{ctg} ax)' = -\frac{a}{\sin^2 ax}$

Пример. Найти y', если $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение. Пользуясь формулой 2, получим:

$$y' = \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}.$$

13. Простейшие правила дифференцирования. 1. Производная суммы равна сумме производных: $(u+v)' = u' + v'$.

2. Производная произведения двух функций равна произведению первого сомножителя на производную второго, сложенному с произведением второго сомножителя на производную первого: $(uv)' = uv' + u'v$.

3. Постоянный множитель можно выносить за знак производной: $(Cu)' = Cu'$, C — постоянная.

4. Производная дроби равна разности произведений знаменателя на производную числителя и числителя на производную знаменателя, разделенной на квадрат знаменателя:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Замечание 1. Во всех этих формулах под u и v подразумеваются функции, дифференцируемые в одной и той же точке. Отсюда уже следует дифференцируемость $u+v$, uv и $\frac{u}{v}$ в той же точке.

Замечание 2. При выводе формул приходится пользоваться тем, что $\Delta u \to 0$ и $\Delta v \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Это следует из непрерывности u и v, которая имеется ввиду дифференцируемости u и v.

Так, $(uv)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{u\cdot\Delta v + v\cdot\Delta u + \Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v + \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v\right) = uv' + u'v + u'\cdot 0 =$

$= uv' + u'v.$

Пример. Найти производную y' функции:
а) $y = x^5 - 4x^3 + 3$; б) $y = x^2 \sin 3x$;
в) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$; г) $y = \sin 4x \cos^2 x$.

Решение. а) Пользуясь правилами 1 и 3 и формулой 2 (п. 12), получим: $y' = 5x^4 - 12x^2$. б) Пользуясь правилом 2 и формулами дифференцирования 2 и 7, получим: $y' = 3x^2 \cos 3x + 2x \sin 3x$. в) Пользуясь правилом 4 и формулой 2, получим: $y' = \dfrac{2x(x^3+1) - 2x(x^3-1)}{(x^3+1)^2} = \dfrac{4x}{(x^3+1)^2}$.
г) $y = \sin 4x \cos^2 x = \dfrac{1}{2} \sin 4x + \dfrac{1}{2} \sin 4x \cos 2x$. Пользуясь правилами 1, 2, 3 и формулами 7 и 8, получим:
$$y' = \frac{1}{2} \cdot 4 \cos 4x + \frac{1}{2} (4 \cos 4x \cos 2x - 2 \sin 4x \sin 2x) =$$
$$= 2 \cos 4x + 2 \cos 4x \cos 2x - \sin 4x \sin 2x.$$

14. Производная обратной и сложной функций. 1. Если возрастающая (убывающая) в некотором промежутке функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 отличную от нуля производную $f'(x_0)$, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ имеет в точке $y_0 = f(x_0)$ производную, равную $\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Кратко это записывают так: $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$.

Пример. Найти производную функции $y = \arcsin x$, где $-1 < x < 1$.

Решение. Функции $y = \arcsin x$ и $x = \sin y$ — взаимно обратные. Поэтому, получим:
$$(\arcsin x)'_x = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Аналогично можно получить формулы:
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\operatorname{arc\,tg} x)' = -(\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

2. Не нужно думать, что в формулах, приведенных в сводке производных, можно вместо аргумента x подставить функцию. Например, $(x^a)' = ax^{a-1}$, но $[(\operatorname{tg} x)^a]' \neq a(\operatorname{tg} x)^{a-1}$. Функции, подобные $y = (\operatorname{tg} x)^a$, сложные и для них существует свое правило дифференцирования. Оно вытекает из следующей теоремы: если функция $u = \varphi(x)$ имеет в точке x_0 производную $\varphi'(x_0)$, а функция $y = f(u)$ имеет в соответст-

вующей точке $u_0 = \varphi(x_0)$ производную $f'(u_0)$, то сложная функция $f[\varphi(x)]$ имеет в точке x_0 производную $f'[\varphi(x_0)] \cdot \varphi'(x_0)$.

Или более кратко: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Следовательно, производная сложной функции равна произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента.

Пример. Найти производную функции $y = \sqrt{\operatorname{tg} 3x}$.

Решение. $y = \sqrt{u}$, $u = \operatorname{tg} 3x$; $y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} 3x}} \cdot \frac{3}{\cos^2 3x}$.

15. Вторая производная. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в промежутке (a, b), то ее производная $y' = f'(x)$ будет функцией x в этом промежутке. Если новая функция тоже будет дифференцируема, то, взяв от нее производную, получим новую производную, которую обозначают $y'' = f''(x)$ и называют *второй производной функции* (или *производной второго порядка*).

Пример. Найти вторую производную функции $y = \cos 4x$.

Решение. $y' = -4 \sin 4x$, $y'' = -16 \cos 4x$.

§ 4. Исследование функций

16. Признак постоянства функции. Для того чтобы дифференцируемая в некотором промежутке функция была в нем постоянной, необходимо и достаточно, чтобы ее производная равнялась нулю в этом промежутке.

Пример. Доказать равенство $\operatorname{arc tg} x = \operatorname{arc ctg} \frac{1}{x}$ для $x > 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \operatorname{arc tg} x - \operatorname{arc ctg} \frac{1}{x}$ для $x > 0$. Пользуясь формулой $(\operatorname{arc tg} x)' = -(\operatorname{arc ctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ и правилом дифференцирования сложной функции, получим: $y' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$. Следователь-

но, $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = C$, где C — постоянная. Но при $x = 1$ в силу непрерывности функции y в промежутке $(0, +\infty)$ имеем $\operatorname{arc\,tg}\, 1 - \operatorname{arc\,ctg}\, 1 = 0$. Поэтому $C = 0$ и $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$. В промежутке $(-\infty, 0)$, как можно показать, $C = -\pi$.

17. Признаки возрастания и убывания функций. 1. Как известно (п. 125, гл. III), если функция $f(x)$ возрастает (убывает) в промежутке (a, b), то с увеличением (уменьшением) значений аргумента увеличиваются (уменьшаются) и соответствующие им значения функции.

Отсюда непосредственно следует, что функция $y = f(x)$ будет возрастающей (убывающей) в промежутке (a, b) тогда и только тогда, когда в любой точке этого промежутка приращения Δx аргумента и Δy функции будут одинаковых (разных) знаков. Это значит, например, для возрастающей функции, что при положительном приращении Δx аргумента x соответствующее ему приращение Δy функции y также будет положительным (рис. 119), а при $\Delta x < 0$ будет и $\Delta y < 0$.

2. Если производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ положительна (отрицательна) в промежутке (a, b), то функция $f(x)$ возрастает (убывает) в этом промежутке.

Действительно, если, например, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ для любой точки промежутка (a, b), то в достаточно малой окрестности любой точки будет $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ (п. 3, гл. 6), а это и значит, что $f(x)$ возрастает в (a, b).

Промежутки возрастания или убывания функции называются *промежутками монотонности* этой функции.

Следует иметь в виду, что в промежутках монотонности функции ее производная может обращаться и в нуль, но эти точки могут быть лишь изолированными (не заполняют сплошь какую-нибудь часть промежутка).

Пример. Найти промежутки монотонности функции: а) $y = \frac{1}{10}x^3 + 1$; б) $y = \frac{x}{1 + x^2}$.

Решение. а) $y' = \frac{3}{10}x^2 > 0$ при всех $x \neq 0$, и, следовательно, функция возрастает (рис. 120). Наличие точки

$x = 0$, где $y' = 0$, не мешает, как легко видеть, возрастать функции во всем промежутке $(-\infty, +\infty)$. б) $y' = \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$. Если $|x| < 1$, т. е. $-1 < x < 1$, то $y' > 0$ и функция возрастает в промежутке $(-1, 1)$. В промежутках же $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$, где $|x| > 1$ и

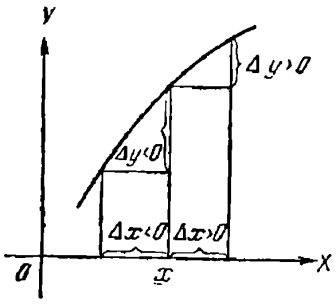

Рис. 119.

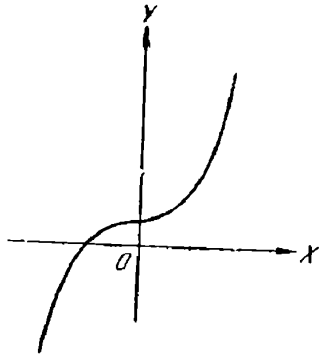

Рис. 120.

$y' < 0$, функция убывает. Если заметить, что $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 0$ и $y = -\frac{1}{2}$ при $x = -1$, а $y = \frac{1}{2}$ при $x = 1$, то этого уже достаточно, чтобы сделать набросок графика (рис. 121).

Пример. Доказать неравенство $\frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{\sin\beta}{\beta}$, если $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \frac{\sin x}{x}$. Ее производная $y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x) < 0$, если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, так как тогда $x < \operatorname{tg} x$. Поэтому функция $y = \frac{\sin x}{x}$ убывающая в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, и из $\alpha < \beta$ следует $\frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{\sin\beta}{\beta}$.

18. Максимумы и минимумы функции. Говорят, что функция $f(x)$ имеет *максимум (минимум)* $f(x_0)$ в точке $x = x_0$, если существует такое $\delta > 0$, что для всех x окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ этой точки, содержащейся в об-

ласти определения функции $f(x)$, выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$ $[f(x_0) < f(x)]$.

На рисунке 122 в точках x_0 и x_2 изображены максимумы функции, а в точках x_1 и x_3 — минимумы.

Максимум (минимум) функции может быть лишь во внутренней точке промежутка, и он является «местным» наибольшим (наименьшим) значением функции, т. е. наибольшим (наименьшим) по сравнению с ее значениями во всех точках, достаточно близких к рассматриваемой.

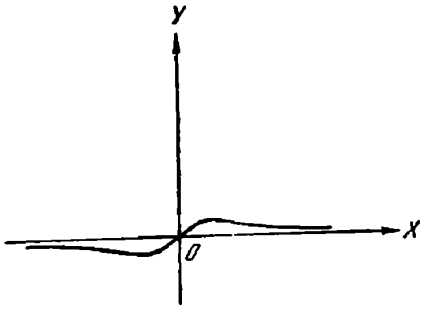

Рис. 121.

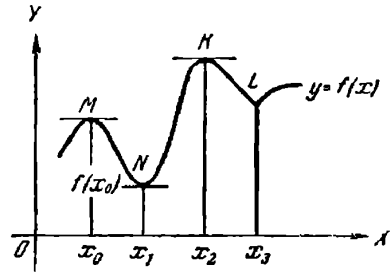

Рис. 122.

Термины «максимум» и «минимум» объединяются термином *экстремум*.

19. Необходимый признак экстремума. Если дифференцируемая функция $f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то производная $f'(x)$ этой функции в рассматриваемой точке равна нулю, т. е: $f'(x_0) = 0$.

Геометрически этот факт очевиден. Так, на рисунке 122 в точке M (да и в точках N и K) графика функции касательная к графику параллельна оси абсцисс. Поэтому ее угловой коэффициент, а следовательно, и производная в рассматриваемой точке равны нулю.

Функция может иметь экстремум и в такой точке, где производная не существует (точка x_3 на рис. 122).

Аналитически это доказывается так. Пусть в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ имеет максимум. Так как $f(x_0)$ — «местное» наибольшее значение, то $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$. Поэтому при $\Delta x > 0$ получим: $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ и $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant 0$ (п. 3, гл. VI), а при $\Delta x < 0$ найдем: $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ и $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0$. Отсюда $f'(x_0) = 0$.

Этот признак необходимый, но недостаточный. Например, при $x = 0$ производная функции $y = \frac{1}{10} x^3 + 1$ равна нулю, но в ней нет экстремума (см. рис. 120).

Точки, в которых производная обращается в нуль, называются *стационарными* для функции.

20. Первый достаточный признак экстремума. Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ для всех $x < x_0$, взятых из достаточно малой окрестности точки $x = x_0$, положительна (отрицательна), а для всех $x > x_0$ этой окрестности—отрицательна (положительна), то функция $f(x)$ имеет максимум (минимум) $f(x_0)$ в точке $x = x_0$.

Дадим набросок доказательства. Если, например, $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то функция $f(x)$ при $x < x_0$ возрастает, а при $x > x_0$ убывает. Поэтому $f(x_0)$ будет наибольшим значением $f(x)$ по сравнению со значениями ее во всех точках, достаточно близких к x_0.

Этот признак позволяет сформулировать следующее правило:

Чтобы найти экстремумы функции $f(x)$ в промежутке (a, b), нужно: а) найти производную $f'(x)$ и приравнять ее нулю; б) решить уравнение $f'(x) = 0$; в) каждый корень x_0 исследовать, определяя знаки производной $f'(x)$ для $x < x_0$ и $x > x_0$ и пользуясь таблицей:

Знак $f'(x)$		$f(x_0)$
при $x < x_0$	при $x > x_0$	
+	−	максимум
−	+	минимум
+	+	ни максимума, ни минимума
−	−	

*

В последних двух случаях говорят, что $x = x_0$ есть *точка перегиба.*

Замечание. Если x_1 и x_2 — ближайшие к x_0 корни производной и $x_1 < x_0 < x_2$, то при исследовании можно брать любые x, не выходящие из открытого промежутка (x_1, x_2).

Пример. Найти максимумы и минимумы функции $y = \frac{1}{15}(3x^5 - 25x^3 + 60x + 16)$.

Решение. $y' = \frac{1}{15}(15x^4 - 75x^2 + 60) = x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$. Корни производной будут: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$. Подставляя в производную сначала $x < -2$, затем $-2 < x < -1$, $-1 < x < 1$, $1 < x < 2$ и $x > 2$, убедимся, что производная y' имеет соответственно знаки $+$, $-$, $+$, $-$, $+$. Следовательно, в точках $x_1 = -2$ и $x_3 = 1$ функция имеет максимум, а в точках $x_2 = -1$ и $x_4 = 2$ — минимум (см. таблицу (*)). Соответствующие значения функции будут: $y_1 = 0$, $y_2 = -\frac{22}{15}$, $y_3 = \frac{18}{5}$, $y_4 = \frac{32}{15}$. График функции приведен на рисунке 123.

21. Второй достаточный признак экстремума. Если в стационарной точке $x = x_0$ функции $f(x)$ ее вторая производная $f''(x)$ отлична от нуля, т. е. $f''(x_0) \neq 0$, то функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ экстремум. При этом, когда $f''(x_0) > 0$, то будет минимум, а при $f''(x_0) < 0$ — максимум.

Рассмотрим, например, случай, когда $f''(x_0) > 0$. Так как $f'(x_0) = 0$, то $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$. Но тогда и $\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ (п. 3, гл. VI). А это значит, что при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ и $f'(x) > 0$, т. е. по первому признаку $f(x_0)$ — минимум.

Если $f''(x_0) = 0$, то, будет ли экстремум или нет, по этому признаку выяснить нельзя.

Пример. Найти экстремумы функции $y = x^3 - 2x - 5$.

Решение. $y' = 3x^2 - 2$, $y'' = 6x$. Корни производной: $x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$. Если $x = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}8$, то $y'' > 0$ и функция имеет минимум. Когда $x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \approx -0{,}8$, то $y'' < 0$ и будет максимум. Подставляя x_1 и x_2 в равенство $y = x^3 - 2x - 5$, найдем: $y_1 \approx -6{,}1$ и $y_2 = -3{,}9$. График функции дан на рисунке 124.

22. Наибольшее и наименьшее значения функции. 1. Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b]$ и имеет там конечное число экстремумов, то самое большое

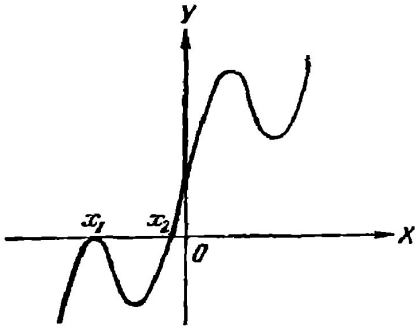

Рис. 123.

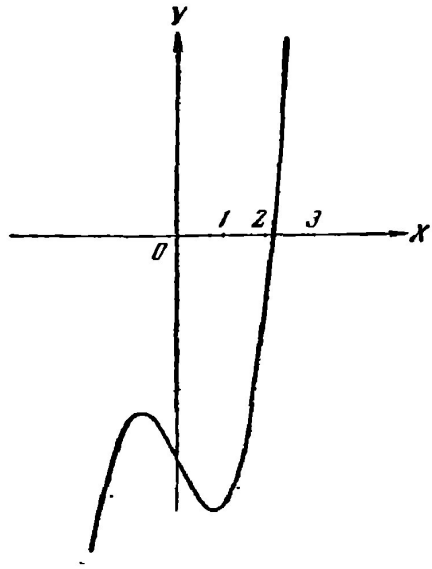

Рис. 124.

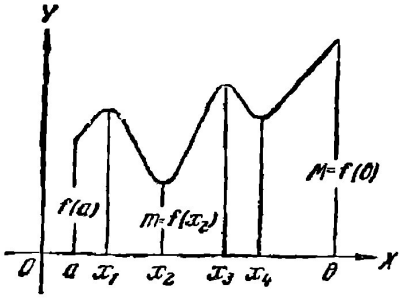

Рис. 125.

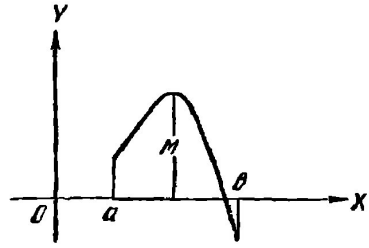

Рис. 126.

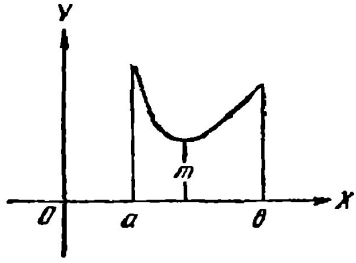

Рис. 127.

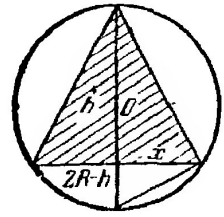

Рис. 128.

(малое) число из всех ее максимумов (минимумов) и значений на концах промежутка будет *наибольшим* (*наименьшим*) значением функции $f(x)$ в этом промежутке. Так, на рисунке 125 наибольшее значение функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ есть $M = f(b)$, а наименьшее $m = f(x_2)$.

2. Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b]$ и имеет там только один максимум (минимум) и ни одного минимума (максимума), то этот максимум (минимум) есть наибольшее (наименьшее) значение функции в рассматриваемом промежутке (см. рис. 126 и 127).

Пример. Найти наибольший объем прямого кругового конуса, вписанного в шар радиуса R.

Решение. Рассмотрим осевое сечение конуса (рис. 128). Пусть высота конуса h, а радиус основания x. Тогда объем конуса будет $V = \frac{1}{3}\pi x^2 h$. Но $x^2 = h(2R - h)$ и $V = \frac{1}{3}\pi h^2(2R - h)$. Исследуем функцию V на экстремумы. Корни производной $V' = \frac{1}{3}\pi(4Rh - 3h^2)$, очевидно, будут: $h_1 = 0$ и $h_2 = \frac{4}{3}R$. Так как высота конуса не может равняться нулю, то исследуем лишь $h_2 = \frac{4}{3}R$. При $h = \frac{4}{3}R$ вторая производная $V'' = \frac{1}{3}\pi(4R - 6h) = -\frac{4}{3}\pi R < 0$, и, следовательно, при $h = \frac{4}{3}R$ будет максимум V. Функция V непрерывна в промежутке $[0, 2R]$ и имеет там только один максимум. Этот максимум и будет наибольшим значением объема V. Вычислим его: $V_{\text{макс}} = \frac{32}{81}\pi R^3$.

§ 5. Построение графиков функций

23. Общие замечания. Важнейшим для построения графика функции является, возможно, более точная характеристика общего хода изменения функции. Это достигается исследованием функции, в частности отысканием точек, наиболее характерных для данного графика. К таким точкам относятся прежде всего точки экстремумов, точки в которых предел функции $\pm\infty$ (точки разрыва), точки перегиба (см. п. 24, гл. VI) и некоторые другие.

В схеме построения графика (п. 126, гл. III) мы будем находить экстремумы одновременно с отысканием промежутков монотонности функции, поскольку точки экстремумов являются граничными для смежных промежутков монотонности. Точки разрыва являются граничными для смежных промежутков, в которых функция определена, и отысканием их естественно заниматься в связи с выяснением области определения функции.

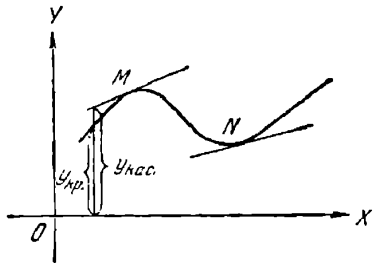

Рис. 129.

24. Выпуклости и вогнутости. График функции можно уточнить, определив его *выпуклости* и *вогнутости*.

График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым* (*вогнутым*) в промежутке (a, b), если он расположен *под* (*над*) касательной, проведенной в любой точке графика.

Выражение «кривая находится под (над) касательной» означает, что разность $y_{кр} - y_{кас}$ ординат кривой и касательной, соответствующих одной и той же абсциссе, отрицательна (положительна) (см. рис. 129).

Достаточным признаком выпуклости (вогнутости) графика функции $y = f(x)$ в промежутке (a, b) является отрицательность (положительность) ее второй производной $f''(x)$ в этом промежутке, т. е. условие $f''(x) < 0$ $[f''(x) > 0]$.

Точки графика, отделяющие смежные промежутки выпуклости и вогнутости, называются *точками перегиба*. В них вторая производная $f''(x)$ (если она существует) равна нулю. Однако равенство $f''(x) = 0$ является необходимым, но недостаточным условием перегиба (см. п. 21, гл. VI).

25. Примеры построения графиков. 1. Построить график функции $y = f(x) = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$.

Решение. а) Область определения функции $(-\infty, +\infty)$. Точек разрыва нет. б) Так как $f(-x) = f(x)$, то график симметричен относительно оси ординат. Поэтому исследуем функцию лишь в промежутке $[0, +\infty)$. в) Ищем экстремумы, пользуясь вторым достаточным признаком. Имеем: $f'(x) = 2x - 2x^3$, $2x - 2x^3 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Так как $f''(x) = 2 - 6x^2$, то $f''(0) > 0$ (минимум), $f''(1) < 0$ (максимум), причем $y_1 = 1$, $y_2 = 1{,}5$. Отсюда же за-

ключаем, что в промежутке (0,1) функция возрастает, потому что там $f'(x)=2x-2x^3>0$, а в промежутке $(1, +\infty)$ — убывает. г) Значение функции на левом конце промежутка будет $y=1$. Что касается правого конца, то здесь нужно найти $\lim y$ при $x\to+\infty$. Очевидно, если $x\to+\infty$, то $y=-x^4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)\to-\infty$. д) В качестве дополнительных точек возьмем точки пересечения графика с осями координат. Положив $x=0$, получим точку (0,1), ранее найденную (минимум), а при $y=0$ или $1+x^2-\frac{x^4}{2}=0$ получим: $x=\sqrt{1+\sqrt{3}}\approx 1{,}7$. е) Найдем промежутки выпуклости и вогнутости графика. Имеем: $f''(x)=2-6x^2$, $2-6x^2=0$, $x^2=\frac{1}{3}$, $x=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0{,}6$. При $x<\frac{1}{\sqrt{3}}$ получим: $f''(x)=6\left(\frac{1}{3}-x^2\right)>0$ (вогнутость), если же $x>\frac{1}{\sqrt{3}}$, то $f''(x)<0$ (выпуклость). При $x_3=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ордината $y_3=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{18}=\frac{23}{18}\approx 1{,}3$. В точке (x_3, y_3) график имеет перегиб.

Для лучшей обозримости результаты исследования сводим в таблицу:

x	0	0,6	1	1,7	$+\infty$
y	1	1,3	1,5	0	$-\infty$
	минимум	перегиб	максимум		

По этим данным строим график (рис. 130).

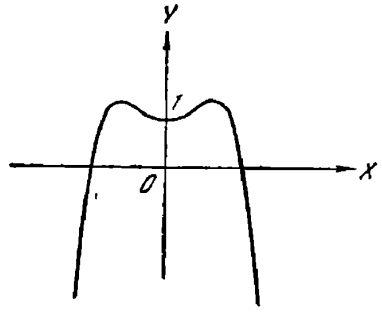

Рис. 130.

2. Построить график функции $y = \frac{1}{2}(2\sin 2x + \sin 4x)$.

Решение. а) Область определения $(-\infty, +\infty)$, но функция имеет период $\omega = \pi$, поэтому исследуем лишь промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Точек разрыва нет. б) $f(-x) = -f(x)$ (нечетность), график симметричен относительно начала координат и поэтому рассматриваем лишь промежуток $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. в) $y' = 2\cos 2x + 2\cos 4x = 4\cos 3x \cdot \cos x$, $\cos 3x \cos x = 0$; $3x = \frac{2k+1}{2}\pi$, $x = \frac{2k+1}{6}\pi$, $x = \frac{2l+1}{2}\pi$; $k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Так как $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, то стационарные точки будут: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$. Исследование с помощью второй производной дает: $f''(x) = -4\sin 2x - 8\sin 4x$, $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -6\sqrt{3} < 0$ (максимум), $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ (сомнительный случай). Обращаемся к первой производной $y' = 4\cos 3x \cos x$. При переходе через точку $x = \frac{\pi}{2}$ слева направо производная y' не меняет знака, оставаясь отрицательной. Следовательно, здесь точка перегиба. Значения ординат для $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{\pi}{2}$ будут: $y = \frac{3}{4}\sqrt{3} \approx 1{,}3$ и $y = 0$. Отсюда заключаем, что в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ функция возрастает, так как там $y' = 4\cos 3x \cos x > 0$, а в промежутке $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ — убывает. г) На левом конце $x = 0$ промежутка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ордината $y = 0$. На правом конце $x = \frac{\pi}{2}$ подсчитана ранее (перегиб). д) Точки пересечения графика с осями координат найдены ранее $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. е) $y'' = -4\sin 2x - 8\sin 4x = -4\sin 2x(1 + 4\cos 2x)$. Вторая производная обращается в нуль при $x = 0$, $x = \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \approx 0{,}9$ и $x = \frac{\pi}{2}$, причем соответствующие ординаты: $y = 0$, $y \approx \sin 1{,}8 + \frac{1}{2}\sin 3{,}6 \approx$

$\approx 0{,}7$, $y = 0$. В промежутке $(0;\ 0{,}9)$ кривая выпукла, так как там вторая производная $y'' = -4\sin 2x\,(1 + 4\cos 2x) < 0$ ($\sin 2x > 0$, $4\cos 2x + 1 > 0$), в промежутке $\left(0{,}9;\ \frac{\pi}{2}\right)$ — вогнута, так как там $y'' > 0$.

Составляем таблицу:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	0,9	$\frac{\pi}{2}$
y	0	1,3	0,8	0
	перегиб	максимум	перегиб	перегиб

График функции изображен на рисунке 131.

3. Построить график функции $y = f(x) = \frac{x^3 + 2}{2x}$.

а) Область определения состоит из двух промежутков: $(-\infty,\ 0)$ и $(0 + \infty)$. В точке $x = 0$ разрыв функции, и ось ординат является вертикальной асимптотой графика. б) $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$. График не симметричен ни относительно оси ординат, ни относительно начала координат. в) Исследуем функцию на экстремумы: $y' = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}\right)' = x - \frac{1}{x^2}$, $x - \frac{1}{x^2} = 0$, $x^3 - 1 = 0$, $x = 1$, $y'' = 1 + \frac{2}{x^3}$, $y''(1) > 0$ (минимум). При $x = 1$ ордината $y = 1{,}5$. г) Выясним поведение функции на концах промежутков $(-\infty,\ 0)$ и $(0,\ +\infty)$. Если $x \to -\infty$, то $y = x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^3}\right) \to +\infty$, если $x \to -0$, то $y = \frac{1}{2x}(x^3 + 2) \to -\infty$. При $x \to +0$ найдем, что $y \to +\infty$, а при $x \to +\infty$ будет $y \to +\infty$. д) Из равенства $y = \frac{x^3 + 2}{2x}$, положив в нем $y = 0$, найдем: $x = -\sqrt[3]{2} \approx -1{,}3$. В точке $(-1{,}3;\ 0)$ график функции пересекает ось абсцисс. С осью ординат он не пересекается, так как при $x = 0$ функция имеет разрыв. е) $y'' = \frac{x^3 + 2}{x^3}$, $\frac{x^3 + 2}{x^3} = 0$, $x^3 + 2 = 0$, $x = -\sqrt[3]{2} \approx -1{,}3$. В этой точке, как мы видели, график пересекает ось абсцисс. Разобьем область определения функции на три промежутка: $(-\infty;\ -\sqrt[3]{2})$, $(-\sqrt[3]{2};\ 0)$,

$(0; +\infty)$. Легко убедиться, что в первом промежутке $f''(x) = \frac{x^3+2}{x^3} > 0$ (вогнутость), во втором $f''(x) < 0$ (выпуклость), в третьем $f''(x) > 0$ (вогнутость). Точка (1,3; 0) — точка перегиба графика.

Составляем таблицу:

x	$-\infty$	$-1,3$	0	1	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$\mp\infty$	$1,5$	$+\infty$
		перегиб	асимптота	минимум	

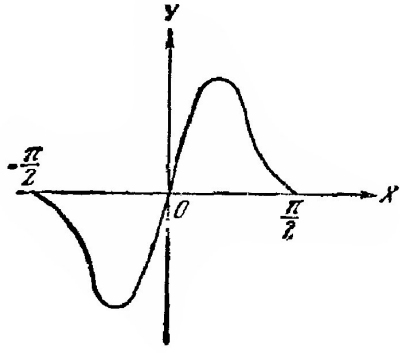

Рис. 131.

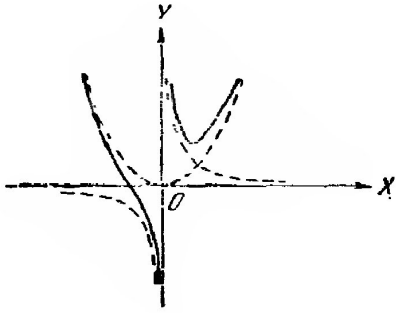

Рис. 132.

При построении графика (рис. 132) следует учесть, что когда $x \to \pm\infty$, то в равенстве $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$ второе слагаемое $\frac{1}{x} \to 0$ и ордината графика при больших $|x|$ близка к ординате параболы $y = \frac{1}{2}x^2$. Если $x \to 0$, то в том же равенстве первое слагаемое $\frac{x^2}{2} \to 0$ и ордината графика при малых $|x|$ близка к ординате гиперболы $y = \frac{1}{x}$. Эти линии $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = \frac{1}{x}$ называются *криволинейными асимптотами* графика. На рисунке 132 они изображены пунктиром.

§ 6. Приближенное решение уравнений

26. Графическое решение уравнений. Вещественные корни уравнения $f(x) = 0$ геометрически можно толковать как абсциссы точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью абсцисс. Поэтому, если начертить график функции $y = f(x)$ и измерить в выбранном для построения графика масштабе отрезки, соответствующие абсциссам точек пересечения графика с осью абсцисс, то можно получить приближенные значения вещественных корней уравнения $f(x) = 0$.

Аналогично можно поступать при решении уравнения $f_1(x) = f_2(x)$. В этом случае придется построить графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ и измерить абсциссы их точек пересечения, которые и дадут приближенные значения вещественных корней уравнения $f_1(x) = f_2(x)$.

Степень точности графического решения существенно зависит от масштаба построения графика. Если вблизи точки пересечения графиков выполнить построения в достаточно большом масштабе, то можно получить корни с высокой степенью точности.

Пример. Решить графически уравнения: а) $3x^5 - 25x^3 + 60x + 16 = 0$; б) $2^x + 1{,}2x = 2$.

Решение. а) Функция $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 16$ принимает большие значения даже при небольших значениях x. Например, $f(0) = 16$. Поэтому вместо графика $y = f(x)$ строим график $y = \frac{1}{15} f(x)$ (рис. 123). Измерив абсциссы точек пересечения графика с осью абсцисс, получим следующие приближенные значения вещественных корней уравнения: $x_1 = -2$, $x_2 = -0{,}3$.

б) Построив графики показательной функции $y = 2^x$ и прямой $y = 2 - 1{,}2x$ (рис. 133), найдем вещественный корень $x \approx 0{,}5$.

Пример. Решить графически систему уравнений: $x^2 + y = 10$, $x + y^2 = 4$.

Решение. Построив параболы $y = -x^2 + 10$ и $x = -y^2 + 4$ (рис. 134) и взяв координаты точек их пересечения, найдем следующие решения системы: $x_1 = 3$, $y_1 = 1$; $x_2 \approx 3{,}3$, $y_2 \approx -0{,}7$; $x_3 \approx -3{,}6$, $y_3 \approx -2{,}9$; $x_4 \approx -2{,}8$, $y_4 \approx 2{,}6$.

27. Отделение корня. Корень ξ уравнения $f(x) = 0$ называется *отделенным (или изолированным)*, если найден

такой промежуток $[a, b]$, что внутри его содержится только один этот корень ξ.

Здесь $a < \xi < b$ и числа a и b могут быть приняты за приближенные значения корня по недостатку и по избытку. Если, кроме того, $f(a) \cdot f(b) < 0$, то промежуток изолирования корня можно уменьшить и тем самым получить улучшенные приближения корня. Для этого разделим про-

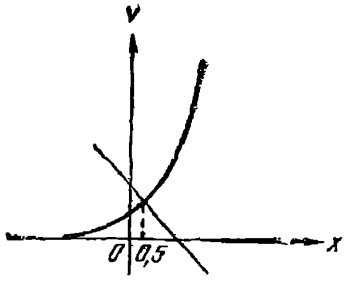

Рис. 133.

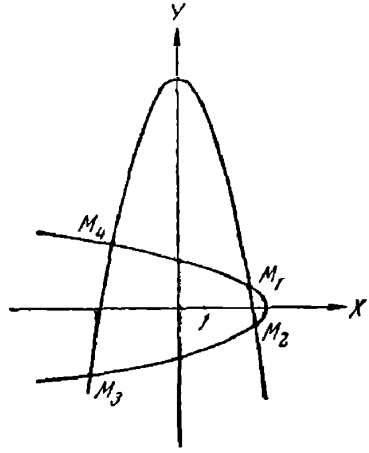

Рис. 134.

межуток $[a, b]$ пополам точкой деления x_1. Если $f(x_1)=0$, то x_1 будет равен ξ, т. е. корень будет найден. Если же $f(x_1) \neq 0$, то знак $f(x_1)$ будет противоположен или знаку $f(a)$ или знаку $f(b)$. Пусть, например, будет $f(a) f(x_1) < 0$. Тогда корень ξ будет находится в промежутке $[a, x_1]$ (см. п. 7, гл. VI). Итак, $a < \xi < x_1$ и приближенное значение x_1 (по избытку) корня ξ улучшено, а промежуток изоляции сужен. Этот процесс можно продолжить, получая дальнейшие улучшения приближенных значений корня.

Для установления первого промежутка изолирования корня можно воспользоваться графиком функции $y = f(x)$.

Иногда бывает удобнее делить промежуток не на две части, а на десять частей.

Пример. Отделить корни уравнения: $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Решение. Строим график функции $y = x^3 - 2x - 5$ (рис. 124). По графику видим, что уравнение имеет только один вещественный корень и он находится в промежутке $[2, 3]$, причем $f(2) < 0$, а $f(3) > 0$. Числа $a = 2$ и $b = 3$ являются приближенными значениями корня по недостат-

ку и по избытку. Уменьшим промежуток изолирования корня. По графику видно, что целесообразно разделить промежуток [2, 3] не на две части, а на десять. Тогда получим промежутки: [2; 2,1], [2,1; 2,2] ,..., [2,9; 3]. Проверяем значения функции на границах этих промежутков. Имеем: $f(2) = -1 < 0$, $f(2,1) = 2,1^3 - 2 \cdot 2,1 - 5 = 0,061 > 0$. Так как $f(2)$ и $f(2,1)$ разных знаков, то корень находится в промежутке (2; 2,1), а числа 2 и 2,1 являются его приближенными значениями по недостатку и по избытку.

28. Метод хорд и касательных. 1. Пусть требуется найти вещественные корни уравнения $f(x) = 0$. Будем предполагать, что функция $f(x)$ имеет первую и вторую производные $f'(x)$ и $f''(x)$ в некотором промежутке. Можно доказать, что для широкого класса функций возможно найти такой промежуток $[a, b]$, в котором значения $f(a)$ и $f(b)$ функции на концах будут противоположных знаков, т. е. $f(a) f(b) < 0$, а каждая из производных $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняет знак в этом промежутке. Неизменяемость знаков производных означает, что функция $f(x)$ монотонно возрастает в промежутке $[a, b]$, а ее график там все время обращен выпуклостью в одну сторону. Из условия $f(a) f(b) < 0$ следует, что в $[a, b]$ имеется корень уравнения $f(x) = 0$, а из условия монотонности $f(x)$ — что там корень единственный. Геометрически эти условия означают, что возможны лишь четыре случая расположения графика $y = f(x)$ вблизи корня, которые и изображены на рисунках 135 — 138.

Обратимся к рисунку 135. Корень ξ уравнения $f(x) = 0$ отделен, причем $a < \xi < b$. Числа $x_1 = a$ и $x_1' = b$ являются приближенными значениями корня по недостатку и по избытку. Соединим концы M и N графика хордой MN. Она пересечет ось абсцисс ($f(x)$ возрастает!) в некоторой точке K с абсциссой x_2. Проведем в точке N касательную NL к графику. Она пересечет ось абсцисс ($f'(x) \neq 0$) в некоторой точке L с абсциссой x_2'. Из чертежа видно, что $x_2 < \xi < x_2'$. Таким образом, получены новые (улучшенные) приближенные значения x_2 и x_2' корня ξ по недостатку и по избытку. В новом промежутке $[x_2, x_2']$ функция $f(x)$ также удовлетворяет всем условиям, перечисленным выше. Поэтому все сказанное об участке MN графика можно повторить для участка M_1N_1 и получить, если в этом есть надобность, еще более улучшенные приближения к корню ξ.

Этот метод носит название *метода хорд и касательных*. Если пользуются только хордами, то он называется *методом хорд*, при использовании только касательных — *методом касательных*.

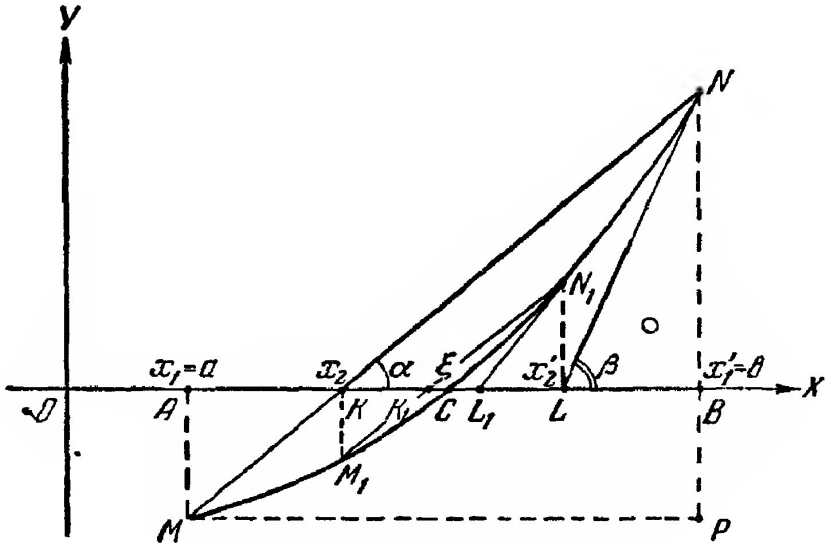

Рис. 135.

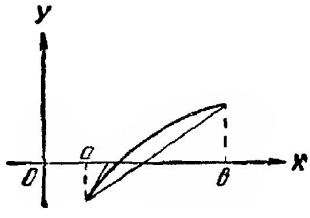

Рис. 136.

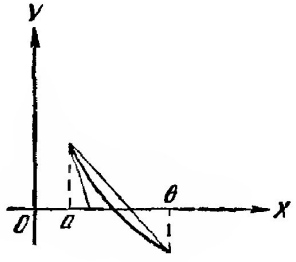

Рис. 137.

2. Для вычисления новых приближений x_2 и x_2' пользуются не чертежем, а формулами, которые можно получить из того же рисунка 135. Дадим набросок геометрического вывода их. Замечая, что $AM = -f(a)$, $NB = f(b)$ и $MP = b - a$, получим $x_2 = OK = OA + AK = a + AM \operatorname{ctg} \alpha = a + AM \cdot \frac{MP}{NP} = a - f(a) \cdot \frac{b-a}{f(b)-f(a)} =$

$= x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_1' - x_1}{f(x_1') - f(x_1)}$; $x_2' = OL = OB - LB = b - NB \times$

$\times \operatorname{ctg} \beta = b - \frac{NB}{\operatorname{tg} \beta} = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = x_1' - \frac{f(x_1')}{f'(x_1')}$.

3. Вывод формул для новых приближений x_2 и x_2' через прежние x_1 и x_1' был основан на рисунке 135. Этот вывод изменится, если пользоваться рисунками 136 — 138. Однако оказывается, что полученные формулы верны во всех случаях. Но при этом за первое приближение x_1 нужно брать тот конец промежутка $[a, b]$, на котором значения функции $f(x)$ и ее второй производной $f''(x)$ одного знака, а за приближение x_1 — другой конец. Так на рисунке 135 мы приводили касательную в точке N. Если бы провести касательную к графику в точке M, то ее точка пересечения с осью абсцисс отстояла бы от точки C дальше, чем точка B.

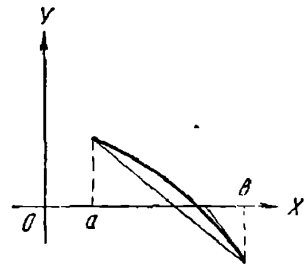

Рис. 138.

Пример. Найти вещественные корни уравнения $x^3 - 2x - 5 = 0$ с точностью до 0,01.

Решение. В предыдущем примере было установлено, что это уравнение имеет только один вещественный корень и что он находится в промежутке $[2; 2,1]$. Выясним знаки $f(x) = x^3 - 2x - 5$ и $f''(x) = 6x$ на левом конце этого промежутка. Получим $f(2) = 8 - 4 - 5 = -1 < 0$, $f''(2) = 12 > 0$. Следовательно, полагаем $x_1 = 2$, а $x_1' = 2{,}1$. Подготовим некоторые данные, нужные при использовании формул для x_2 и x_2'. Имеем: $f(2{,}1) = 2{,}1^3 - 2 \cdot 2{,}1 - 5 = 0{,}061$; $f'(x) = 3x^2 - 2$, $f'(2{,}1) = 3 \cdot 2{,}1^2 - 2 = 11{,}23$. Теперь получим: $x_2 = 2 - f(2) \cdot \dfrac{2{,}1 - 2}{f(2{,}1) - f(2)} = 2 - (-1) \times \dfrac{0{,}1}{0{,}061 - (-1)} = 2 + \dfrac{0{,}1}{1{,}061} = 2{,}0942$; $x_2' = 2{,}1 - \dfrac{f(2{,}1)}{f'(2{,}1)} = 2{,}1 - \dfrac{0{,}061}{11{,}23} = 2{,}0946$.

Итак, $2{,}0942 < \xi < 2{,}0946$ и $\xi \approx 2{,}09$.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

(цифры обозначают страницы)

А

Абсолютная величина *27*
Абсцисса *101*
Аксиома *113*
— Архимеда *114*
Алгебраическая сумма *28*
—форма комплексного числа *54*
Алгебраическое выражение *29*
— — дробное *29*
— — иррациональное *29*
— — рациональное *29*
— — целое *29*
Алфавиты греческий и латинский *3*
Апофема многоугольника *129*
— пирамиды *165*
— — усеченной *166*
Аргумент *100*
— комплексного числа *54*
Арифметика *8*
Арифметические действия *8*
Арккосеканс *191*
Арккосинус *190*
Арккотангенс *191*
Арксеканс *191*
Арксинус *190*
Арктангенс *191*
Ассоциативный закон сложения *10*
— — умножения *10*

Б

Бесконечно большая *211*
— малая *211*
Бином Ньютона *90*
Биссектриса треугольника *123*
— угла *117*
Боковая поверхность конуса *169*
— — — усеченного *171*
— — пирамиды *166*
— — — усеченной *166*
— — призмы *164*
— — цилиндра *168*
Большой круг *173*

В

Введение множителя под знак корня *46*
Вектор *57*
Величина переменная *99*
— постоянная *99*
Верхняя граница функции *220*
Взаимное расположение двух окружностей *131*
— — прямой и окружности *130*
Вогнутость *236*
Возведение в квадрат многочлена *36*
— — степень двучлена (бином Ньютона) *36, 90*
— — — дроби (частного) *51*
— — — комплексного числа *53, 56*
— — — корня *46*
— — — одночлена *31*
— — — произведения, частного, степени *51*
— — — целого числа *9*
Вторая производная *228*
Выводная система уравнений *65*
Вынесение за скобку *37*
— множителя из-под знака корня *45*
Выпуклость *236*
Высота конуса *169*
— — усеченного *171*
— пирамиды *165*
— — усеченной *166*
— призмы *164*
— сегментной поверхности *174*
— трапеции *128*
— треугольника *123*
— цилиндра *168*
— шарового пояса *173*
Вычитаемое *8*
Вычитание вещественных чисел *42*
— дробей алгебраических *39*
— — десятичных *20*
— — обыкновенных *18*
— дуг *116*
— комплексных чисел *52*
— корней (радикалов) *47*
— многочленов *32*
— одночленов *30*
— отрезков *114*
— углов *117*
— целых чисел *8*

Г

Гексаэдр (куб) *167*
Геометрическая фигура *112*
Геометрическое место точек *116*
— тело *112*
Геометрический смысл производной *225*
Гипербола *105*
Гипотенуза *122*
Гомотетичные точки *135*
— фигуры *137*
Градус дуговой *116*
— угловой *118*
Граница функции верхняя *220*
— — нижняя 220
График прямой пропорциональности *104*
— обратной пропорциональности *104*
— функции *102*
— — квадратной *105*
— — линейной *103*
— — логарифмической *107*
— — показательной *107*
Графики тригонометрических функций *196, 197*

Д

Действия разных ступеней *12*
Деление вещественных чисел *42*
— дробей алгебраических *40*
— — десятичных *21*
— — обыкновенных *19*
— комплексных чисел *53, 56*
— корней (радикалов) *46*
— многочлена на $x - a$ *35*
— многочленов *32*
— одночленов *30*
— с остатком *9, 35*
— степеней *30, 51*
— целых чисел *9*
Делимое *9*
Делитель *9*
Десятичная система счисления *7*
Десятичные знаки *20*
Диагональ многогранника *163*
— многоугольника *121*
— определителя главная *108*
— — побочная *108*
Диаметр круга *116*
— шара *173*
Дистрибутивный закон *10*
Дифференциальное исчисление *222*
Дифференцируемость *222*
Длина дуги окружности *140, 178*
— окружности *139*
— отрезка *114*
Додекаэдр (двенадцатигранник) *167*
Допустимые значения *60*
Достаточный признак экстремума (первый) *232*
— — — (второй) *233*
Дробь алгебраическая *38*
— десятичная *20*
— неправильная *16*
— обратная *19*
— периодическая *22*
— правильная *16*
Дуга окружности *116*

З

Знаки тригонометрических функций *180*
Знаменатель геометрической прогрессии *86*
— дроби *16*
Значения тригонометрических функций углов 30°, 45°, 60° *181*

И

Извлечение квадратного корня из числа *43*
— корня из вещественного числа *43*
— — — дроби *46*
— — — комплексного числа *56*
— — — корня *46*
— — — произведения *45*
Изменение тригонометрических функций *182*
Измерение углов дугами окружности *131*
Икосаэдр (двадцатигранник) *167*
Индукция математическая *89*
Интервал *100*
Интерполяция *96*

К

Касательная плоскость к шаровой поверхности *173*
— прямая к кривой *224*
— — — окружности *116, 131*
Катет *122*

Квадрант *179*
Квадрат *127*
Квадратный кореиь из числа (правило извлечения) *48—50*
Квадратный трехчлен *70*
Коммутативный закон сложения *9*
— — умножения *10*
Комплексные числа и их геометрическое изображение *51—60*
Коническая поверхность *169*
Коиус *169*
— усеченный *170*
Координаты *101*
Кореиь арифметический *44*
— изолированный *241*
— многочлена *35*
— уравнения *61*
— — постороиний *64*
— — потерянный *63*
Косеканс *180*
Косинус *179*
Котангенс *179*
Коэффициент *29*
— гомотетии *137*
— подобия *128*
— пропорциональности *26*
Куб *167*

Л

Лемма *113*
Линия *112*
Логарифм *91*
— произведения *92*
— степеии *93*
— частного *92*
Логарифмирование *93*
Логарифмы десятичные *93*
— натуральные *93*
Ломаная линия *121*
Луч *112*

М

Максимум функции *230*
Математическое выражение *29*
Мантисса *94*
Медиана *123*
Метод геометрических мест *152*
— касательных *244*
— обратности *153*
— параллельного перенесения *154*
— подобия *153*
— симметрии *155*
— хорд *244*
Минимум функции *230*
Минута *118*
Миогогранник *163*
— правильный *166*
Многоугольник *121*
— вписаиный *128*
— описанный *128*
— правильный *129*
Многоугольиики подобные *128*
Многочлен *31*
— неприводимый *36*
— однородный *31*
— приведенный *32*
— приводимый *36*
Множимое *8*
Множитель *8*
Модуль десятичных логарифмов *94*
— комплексного числа *54*

Н

Наибольшее значеиие фуикции *220, 233*
Наименьшее зиачеиие функции *220, 233*
Наклонная к плоскости *158*
— — прямой *118*
Направлеиные углы *176*
Направлеиный отрезок *57*
Направляющая конуса *169*
— цилиндра *168*
Натуральиый ряд *7*
Нахождение процента числа *23*
— целого по части *20*
— части по целому *19*
— числа по его процентам *23*
Необходимый признак экстремума *231*
Неполное частное *9*
Непрерывность в промежутке *217*
— — точке *215*
— элементарных фуикций *218*
Неравенства равносильные *78*
— с абсолютными величинами *81*
Неравенство *77*
— Буняковского *82*
— второй степени *80*
— первой степени *79*
— тождественное *78*

Нижияя граница функции *220*
Н. о. д. *14*
Н. о. к. *15*
Нуль и действия с ним *10*
Нумерация *7*

О

Область изменения переменной *99*
— определения функции *100*
Обратная дробь *19*
— функция *102*
Обратные тригонометрические функции *189—195*
Обращение дроби десятичной в обыкновенную *21*
— — периодической в обыкновенную и обратно *22*
Общий член последовательности *82*
Объем *163*
— конуса *170*
— — усеченного *171*
— параллелепипеда *165*
— пирамиды *166*
— — усеченной *166*
— призмы *164*
— цилиндра *169*
— шара *175*
— шарового сектора *175*
Одночлен *29*
Одночлены подобные *30*
— равные *29*
Окрестность точки *211*
Окружность *116*
Октаэдр (восьмигранник) *167*
Определение *113*
Определитель *107*
— системы *110*
Ордината *101*
Ортоцентр *124*
Основание конуса *169*
— — усеченного *171*
— логарифмов *91*
— пирамиды *165*
— — усеченной *166*
— призмы *164*
— сегментной поверхности *174*
— системы счисления *7*
— степени *9*
— треугольника *123*
— цилиндра *168*
— шарового пояса *173*
Основное свойство дроби *17, 39*
— — пропорции *24*
Остаток *9, 35*
Ось *42*
— симметрии *124*
Отношение отрезков *115*
— чисел *24*
Отрезки несоизмеримые *114*
— соизмеримые *114*
Отрезок *112*

П

Парабола *105*
Параллелепипед *164*
Параллелограмм *126*
Параллельные плоскости *159*
— прямая и плоскость *158*
— прямые *119*
Переменная *99*
Переместительный закон сложения *9*
— — умножения *10*
Перестановки *88*
Периметр *121*
Период дроби *22*
— тригонометрических функций *182*
— функции *182*
Перпендикуляр к плоскости *158*
— к прямой *118*
Перпендикулярное сечение призмы *164*
Пирамида *165*
— вписанная в конус *170*
— описанная около конуса *170*
— усеченная *166*
Планиметрия *112*
Плоскости взаимно перпендикулярные *161*
Плоскость *112, 157*
Площадь *122*
— круга *140*
— параллелограмма *127*
— ромба *127*
— сегмента круга *140*
— сектора круга *140, 178*
— трапеции *128*
— треугольника *126*
Поверхность *112*
— вращения *171*
— шара *174*
— шарового пояса *174*
Подобные радикалы *47*
— фигуры *139*

Показатель корня *9*
— степени *9*
Последовательность *82*
— возрастающая *83*
монотонная *83*
— ограниченная *83*
— убывающая *83*
Постоянная *99*
Потенцирование *93*
Предел переменной *210*
— последовательности *84*
— — функции *211*
— — слева *212*
— — справа *212*
Приведение дробей к общему знаменателю *17, 39*
— к виду, удобному для логарифмирования *188*
— корней (радикалов) к простейшему виду *47*
— подобных членов *30*
Призма *164*
— вписанная в цилиндр *168*
— описанная около цилиндра *168*
Признак возрастания функции *229*
— выпуклости графика *236*
— постоянства функции *228*
— убывания функции *229*
— экстремума достаточный (второй) *233*
— — — (первый) *232*
— — необходимый *231*
Признаки делимости *12, 13*
Приложение алгебры к геометрии *156*
Прогрессия арифметическая *85*
— геометрическая *86*
— — бесконечно убывающая *87*
Проекция линии *158*
— отрезка *119*
— плоской фигуры *209*
— точки *119, 158*
Произведение *8*
Производная *222*
— второго порядка *228*
— обратной функции *227*
— произведения *226*
— сложной функции *228*
— суммы *226*
— частного *226*
Производные пропорции *25*
Промежуток *99*
Пропорциональное деление *26*
Пропорциональность обратная *26*
Пропорциональность прямая *26*
Пропорция *24*
Простейшие задачи на построение на плоскости *140—150*
— — — — в пространстве *161 — 163*
Процент *23*
Процентное отношение *23*
Проценты сложные *99*
Прямая линия *112*
Прямоугольник *127*
Прямые скрещивающиеся *160*
Пучок плоскостей *157*

Р

Равенство *60*
Равновеликие фигуры *122, 164*
Радиан *177*
Радикал *43*
Радикальная ось *134*
Радикальный центр *135*
Радиус окружности *116*
— — вписанной в треугольник *124*
— — описанной около треугольника *124*
— правильного многоугольника *129*
— шара *173*
Разложение на множители квадратного трехчлена *37, 70*
— — — многочленов *36—38*
— — — чисел *14*
Размещения *88*
Разность *8*
— арифм. прогрессии *85*
Распределительный закон *10*
Расстояние между параллельными плоскостями *159*
— — — прямыми *120*
— от точки до плоскости *159*
— — — до прямой *119*
Решение неравенства *78*
— системы уравнений *64*
— косоугольн. треугольников *208, 209*
— прямоугольных треугольников *206*
— уравнения *61*
Ромб *127*

С

Свойства неравенств *78*
Связка плоскостей *157*
Сегмент (промежуток) *100*
— круга *116*
Секанс *179*
Сектор круга *116*
— шара *174*
Секунда *118*
Секущая *116*
Синус *179*
Система неравенств *79*
Система противоречивая *64, 80*
— счисления *7*
— уравнений *64*
— — выводная *65*
— — 2-й степени *71*
— — линейных *66*
Системы уравнений эквивалентные *64*
Скобки *12*
Скорость в данный момент *223*
Слагаемое *8*
Следствие *113*
Сложение веществен. чисел *41*
— дробей алгебраических *39*
— — десятичных *20*
— — обыкновенных *18*
— дуг *116*
— комплексных чисел *52*
— корней (радикалов) *47*
— многочленов *32*
— одночленов *30*
— отрезков *113*
— углов *117*
— целых чисел *8*
Сложная функция *218*
Соединения *88*
Сокращение дроби *17*
Сочетания *89*
Сочетательн. закон сложения *10*
— — умножения *10*
Способы задания функции *100*
Сравнение дробей *17*
Среднее арифметическое *82*
— геометрическое *82*
Средняя линия трапеции *128*
— — треугольника *125*
Степень *9*
— многочлена *31*
— одночлена *31*
— точки *133*
— уравнения *62*
— числа целая, дробная, нулевая, иррациональная *50, 51*
Стереометрия *112*
Стороны правильного треугольника, четырехугольника, пятиугольника, шестиугольника, восьмиугольника и десятиугольника *129, 130*
Сумма *8*
— бесконечно убывающей геометрической прогрессии *87*

Т

Тангенс *179*
Теорема *113*
— Безу *35*
— Виета *70*
— косинусов *207*
— обратная *113*
— Пифагора *126*
— противоположная *113*
— синусов *206*
— тангенсов *207*
— Эйлера *167*
Теоремы о пределах *84, 85, 215*
Тетраэдр (четырехгранник) *165*
— правильный *166*
Тождество *61*
Точка *112*
— перегиба *232*
— разрыва *216*
Трапеция *128*
Треугольник *122*
Треугольники подобные *125*
Тригонометрическая форма комплексного числа *54*
— функция числа *180*

У

Углы вертикальные *118*
— накрест лежащие *120*
— односторонние *120*
— смежные *118*
— соответственные *120*
— с параллельн. сторонами *120, 160*
— — перпендикулярными сторонами *120*
Угол *117*
— внешний *122*
— внутренний *122*
— вписанный *131*
— двугранный *160*

— как мера вращения *176*
— линейный *160*
— между скрещивающимися прямыми *160*
— многогранный *161*
— описанный *132*
— острый *117*
— отрицательный *176*
— плоский *161*
— положительный *176*
— прямой *117*
— — с плоскостью *160*
— тупой *117*
Угол центральный *118*
Уменьшаемое *8*
Умножение вещественных чисел *42*
— дробей алгебраических *39*
— — десятичных *20*
— —обыкновенных *18*
— комплексных чисел *52, 55*
— корней (радикалов) *45*
— многочленов *32*
— одночленов *30*
— степеней *28, 51*
— целых чисел *8*
Уравнение *61*
— алгебраическое *62*
— возвратное *75*
— двучленное *73*
— дробное *62*
— иррациональное *62*
— квадратное *69*
— линейное *65*
— — однородное *66*
— логарифмическое *98*
— показательное *97*
— трансцендентное *62*
— трехчленное *74*
— тригонометрическое *199*
Уравнения высших степеней *73*
— совместные *64*
— эквивалентные *63*

Ф

Формула удвоения *130*
Формулы деления *188*
— Крамера *110*
— Мольвейде *207*
— приведения *183, 184*
— сложения *186*
— сокращенного умножения и деления 35, 36
— умножения *187*
Функции элементарные *218*
Функция *100*
— возрастающая *103*
— квадратная *105*
— линейная *103*
— логарифмическая *106*
— многозначная *100*
— непрерывная в промежутке *217*
— — — точке *215*
— нечетная *103*
— обратная *102*
— однозначная *100*
— показательная *106*
— четная *103*

Х

Характеристика *94*
Хорда *116, 173*

Ц

Центр гомотетии *137*
— окружности *116*
— — вписанной в треугольник и описанной около треугольника *124*
— подобия *137*
— правильного многоугольника *129*
— симметрии *126*
— тяжести треугольника *124*
— шара *172*
Цилиндр *168*
— круговой *168*
Цилиндрическая поверхность *168*
Цифра *7*

Ч

Частное *9*
Частная сумма последовательности *87*
Числа взаимно простые *15*
— комплексн. сопряженные *52*
Численное значение математического выражения *60*
Числитель *16*
Число алгебраическое *43*
— вещественное (действительное) *42*
— дробное *7, 16*
— иррациональное *40*

— комплексное *51*
— отрицательное *27*
— пи *43, 140*
— подкоренное *43*
— положительное *27*
— противоположное *27*
— простое *13*
— рациональное *27*
— смешанное *16*
— составное *13*
— трансцендентное *43*
— целое *7*
Члены дроби *16*

Ш

Шар *173*
Шаровая поверхность *172*
Шаровой пояс *173*
Шаровой сектор *174*

Э

Экстремум функции *231*
Элемент определителя *108*

«Справочник по математике» содержит все важнейшие вопросы арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии, а также элементы дифференциального исчисления с приложениями к исследованию функций, предусмотренные новой программой.

Он предназначен для учащихся старших классов в качестве пособия при изучении курса элементарной математики и при подготовке к выпускным экзаменам. Лишь некоторые разделы (комплексные числа, обратные тригонометрические функции и др.) изложены несколько шире, чем принято в школе. Это вызвано желанием учесть интересы учащейся молодежи, которая по окончании средней школы поступит на производство.

К «Справочнику» приложен алфавитный указатель и составлено подробное оглавление, что должно облегчить пользование справочником, так как порядок расположения материала в нем иной, чем в учебниках.

Константин Устинович Шахно
СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

Редактор *Г. С. Уманский*
Обложка художника *Н. Н. Румянцева*
Художественный редактор *А. В. Максаев*
Технический редактор *М. О. Дранникова*
Корректор *М. В. Голубева*

Сдано в набор 15/III 1961 г. Подписано к печати 27/VII 1961 г. $84\times108^1/_{32}$.
Печ. л. 16 (13,12). Уч.-изд. л. 12,35. Тираж 360 тыс. экз.
Учпедгиз. Москва. 3-й проезд Марьиной рощи, 41.
Книжная фабрика им. Фрунзе Главполиграфиздата Министерства культуры УССР, Харьков, Донец-Захаржевская. 6/8. Заказ № 1-1475.
Цена без переплета 31 коп., переплет 8 коп.